Programme de colles - Semaine n° 27

du 12 au 18 mai 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

30 – Espaces vectoriels de dimension finie

31 – Dénombrement

32 – Probabilités sur un univers fini (*le début*)

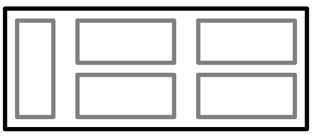
Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Déterminer le nombre de façons de paver un damier de taille $n \times 2$ avec des dominos[1] de taille 1×2.
- Lorsque E désigne un ensemble de cardinal n, dénombrer l'ensemble des p-listes d'éléments de E, l'ensemble des p-listes d'éléments distincts de E, l'ensemble des parties de E, l'ensemble des p-combinaisons de E, l'ensemble des p-listes d'éléments distincts et dans l'ordre croissant de E. A chaque fois, on donnera un argument de preuve rapide utilisant le principe multiplicatif (éventuellement à l'oral).
- Montrer la « formule du chef », la formule de Pascal, la formule du binôme de Newton et la formule de Vandermonde avec des argument de combinatoire. A chaque fois, on donnera un argument de preuve rapide utilisant les principes additifs et multiplicatifs (éventuellement à l'oral).
- Énoncer la définition d'une probabilité et montrer les premières propriétés[2].
- Montrer que, si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$.
  Montrer ensuite que, pour toute distribution de probabilité $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ sur Ω, il existe[3] une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$.
- Déterminer la probabilité que, dans une classe de n élèves (avec $n \in [\![1\,;365]\!]$), au moins deux partagent la même date anniversaire.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera principalement en des exercices de dénombrement ou des premiers exercices de probabilités en situation d'équiprobabilité[4]. S'il reste du temps : encore un exercice sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Prévisions pour la semaine 27 : chapitre 32 et début du chapitre 33 (variables aléatoires finies).

1. Par exemple, si $n = 5$,



2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ et la formule de Poincaré pour deux événements.
3. L'unicité découle de la première partie de la question donc on ne demande pas de la rédiger.
4. Pas de formule des probabilités composées, Bayes ou probabilités totales, ni d'indépendance. Plutôt : construire un univers, le munir de l'équiprobabilité et calculer des probabilités simples avec notamment formule de Poincaré pour 2 ou 3 événements.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie

- Cf. programme de la semaine 26.

Chapitre 31 – Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble fini.
  - ⋆ Ensemble fini et cardinal.
  - ⋆ Opérations sur les ensembles finis : union disjointe, produit cartésien.
  - ⋆ Parties d'un ensemble fini : une partie A d'un ensemble fini E est finie et $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(E)$ avec égalité si et seulement si $A = E$. Intersection d'ensembles dont au moins un est fini. Cardinal d'une différence de parties, du complémentaire d'une partie. Formule de Poincaré pour deux ensembles finis.
  - ⋆ CNS sur le cardinal d'existence d'une fonction injective/surjective/bijective. Principe des tiroirs de Dirichlet. Équivalence entre injectivité et surjectivité pour une fonction entre deux ensembles finis de même cardinal.
- Les grands principes de dénombrement.
  - ⋆ Principe bijectif (mais l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme). Cardinaux de E^F et $\mathscr{P}(E)$ lorsque E et F sont finis.
  - ⋆ Principe additif.
  - ⋆ Lemme des bergers. Principe multiplicatif.
- Listes et combinaisons.
  - ⋆ Il y a $\mathrm{card}(E)^p$ p-listes d'élément de E et $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-listes d'élément distincts de E. Nombre d'injections de E dans F. Nombre de permutations d'un ensemble fini.
  - ⋆ Il y a $\dbinom{n}{k}$ k-combinaisons (parties de cardinal k) d'éléments d'un ensemble de cardinal n. Il y a $\dbinom{n}{k}$ façons de choisir k éléments (distincts ans ordre) d'un ensemble à n éléments. Revisite des propriétés des coefficients binomiaux (dont formule de Pascal et du binôme de Newton).
  - ⋆ Nombres de tirages avec ou sans répétition ou de tirages simultanés.

Chapitre 32 – Probabilités sur un univers fini (le début)

- Espaces probabilisés finis
  - ⋆ Introduction. On se limite au cas des univers finis.
  - ⋆ Univers et événements. Éventualités, événements élémentaires. Événements certain et impossible.
  - ⋆ Opérations sur les événements. Lien avec le vocabulaire ensembliste.
  - ⋆ Système complet d'événements
  - ⋆ Probabilités sur un espace probabilisable fini
    - — Motivation de la définition en tant que limite d'une fréquence. Définition rigoureuse d'une probabilité en tant que fonction de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0\,;1]$ qui est additive (pour des événements incompatibilité) et telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Notion d'espace probabilisé.
    - — Propriétés : probabilité du vide, additivité finie, somme des probabilités d'un système complet d'événements, probabilité du complémentaire, d'une différence. Croissance d'une probabilité. Formule de Poincaré pour deux et trois événements. La probabilité de l'union et inférieure à la somme des probabilités. Événements presque sûrs, négligeables.

  - — Notion de distribution de probabilités. Caractérisation et construction de probabilités : une probabilité est entièrement déterminée par la donnée des probabilités de chaque événement élémentaire.
  - — Probabilité uniforme (ou équiprobabilité). Paradoxe des anniversaires.

- Probabilité conditionnelle
  - ⋆ Définition. $\mathbb{P}_A$ est une probabilité.
  - ⋆ Formules des probabilités composées.