Programme de colles - Semaine n° 26

du 5 au 11 mai 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 28 – Espaces vectoriels
- 29 – Applications linéaires
- 30 – Espaces vectoriels de dimension finie

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer¹ que, si E et F sont de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\text{rg}(v \circ u) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}$.
- Montrer qu'un sous-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie) est un hyperplan² plan si et seulement s'il admet une droite vectorielle pour supplémentaire.
- Montrer de deux³ façons différentes que, si E est de dimension finie, l'intersection de deux hyperplans distincts de E est de dimension $\dim(E) - 2$.
- Montrer l'existence (et l'unicité avec condition de degré) des polynômes d'interpolation de Lagrange et retrouver leur expression sous forme de somme, en utilisant des arguments de dimension.
- Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que $Q(X) = P(X+1) - P(X)$ et qu'il y a unicité à une constante additive près.
- Montrer que $P \mapsto P - 2P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ avec des arguments de dimension.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera principalement en des exercices sur les espace vectoriels de dimension finie.

Prévisions pour la semaine 27 : chapitres 31 (dénombrément) et 32 (probabilités)

1. Cela consiste entre autres à appliquer le théorème du rang à $v|_{\text{Im}(u)}$. On expliquera (à l'oral ou à l'écrit) pourquoi $\text{Ker}(v|_H) = H \cap \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(v|_H) = v(H)$ pour tout sous-espace vectoriel H de F ... éventuellement directement avec $H = \text{Im}(u)$ où $v(H) = \text{Im}(v \circ u)$.
2. Défini comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.
3. Avec la formule de Grassmann puis avec le théorème du rang appliqué à $\varphi|_K$ lorsque $H = \text{Ker}(\varphi)$ et K désignent les deux hyperplans en question.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Cf. programme de la semaine 23.

Chapitre 29 – Applications linéaires

- Cf. programme de la semaine 24.

Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie

- Dimension d'un espace vectoriel.
 - ★ Notion d'espace vectoriel de dimension finie.
 - ★ Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base incomplète/extraite.
 - ★ Théorème de l'échange. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille formée d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée. Critère pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
 - ★ Exemples : espace de dimension 0, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions des EDL homogènes d'ordre 1 ou 2.
 - ★ Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.
 - ★ Familles libres et génératrices en dimension finie. Bases de polynômes échelonnées en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. Application aux suites récurrences linéaires d'ordre 2.
- Sous-espaces vectoriels et dimension.
 - ★ Dimension d'un sous-espace vectoriel. Critère d'égalité de sous-espaces vectoriel en cas d'inclusion et même dimension. Droites vectorielles et plans vectoriels.
 - ★ Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann. CNS pour que deux espaces soient supplémentaires avec la dimension.
 - ★ Rang d'une famille de vecteurs. CNS pour que la famille soit libre/génératrice/une base. Invariance du rang par opérations élémentaires. Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous-familles libres.
- Applications linéaires en dimension finie.
 - ★ Reformulation du théorème de caractérisation par l'image d'une base. Si E est de dimension finie $n \geq 2$, alors l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est non commutatif. CNS d'existence d'injections, de surjection, de bijection linéaire de E dans F en comparant les dimensions de E et F .
 - ★ Isomorphismes en dimension finie. CNS pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes avec l'égalité des dimensions. Tout espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. CNS par transformation d'une base en une base. Le rang d'une famille de vecteurs est invariant par isomorphisme.
 - ★ Rang d'une application linéaire.
 - Application linéaire de rang fini. Cas d'un rang nul. Cas d'un espace de départ de dimension finie. CNS d'injectivité avec le rang. CNS de surjectivité avec le rang.
 - Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies (l'injectivité est équivalente à la surjectivité). Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible (pour la composition).
 - En dimension quelconque, si $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S , alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang). Théorème du rang quand l'espace de départ est de dimension finie.

— Invariance du rang par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Le rang d'une composition est majoré par le maximum des deux rangs.

- Formes linéaires et hyperplans.

- ★ Formes linéaires. Formes coordonnées relativement à une base. Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.
- ★ Hyperplan en dimension quelconque (noyau d'une forme linéaire non nulle). Caractérisation géométrique en tant que supplémentaire d'une droite vectorielle. Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.
- ★ Base des formes coordonnées en dimension finie. Équations d'un hyperplan en dimension finie. CNS de dimension d'un hyperplan en dimension finie. L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins égale à $\dim(E) - m$. Tout sous-espace de dimension $\dim(E) - m$ est l'intersection de m hyperplans. Systèmes d'équations et hyperplans.