Programme de colles - Semaine n° 25

du 28 avril au 4 mai 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

28 – Espaces vectoriels

29 – Applications linéaires

30 – Espaces vectoriels de dimension finie (*sauf les hyperplans et formes linéaires*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que, si $E = F \oplus G$ et si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et [1] $\mathrm{Ker}(p) = G$.
- Montrer que, si f est une involution linéaire sur E, alors les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires et f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
- Énoncer et montrer le théorème d'existence de bases en dimension finie.
- Énoncer et montrer la formule de Grassmann
- Montrer que, si E est de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors f est de rang fini (on donnera la définition) et $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si f est invective. Montrer ensuite qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension est invective si et seulement si elle est surjective.
- Énoncer et montrer le théorème du rang (d'abord la version géométrique puis la version « classique » qui en découle).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera principalement en des exercices sur les applications linéaires (étude explicite ou exercice plus abstrait). Les exercices abstraits sur les applications linéaires n'utiliseront pas de notion de dimension. En revanche des outils simples de dimension pourront être éventuellement utilisés dans un exercice plus explicite sur les applications linéaires (trouver la dimension en comptant le nombre de vecteurs dans une base, utiliser le fait qu'une famille libre ayant autant de vecteurs que la dimension est une base, utiliser le théorème du rang pour déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ou $\mathrm{Im}(f)$ à partir de celle de l'autre). Le théorème de caractérisation d'une application par l'image d'une base est au centre de cette colle.

Prévisions pour la semaine 26 : chapitres 30 et 31 (dénombrement)

1. On pourra justifier à l'oral pourquoi $p(x) = x$ ssi $x \in F$ et $p(x) = 0$ ssi $x \in G$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Cf. programme de la semaine 23.

Chapitre 29 – Applications linéaires

- Notion d'application linéaire.
  - ⋆ Définition. Caractérisation. Condition nécessaire sur l'image de 0. Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{GL}(E)$. Image d'une combinaison linéaire.
  - ⋆ Nombreux exemples. Identité de E. Homothéties de E.
- Opérations sur les applications linéaires.
  - ⋆ Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel. Endomorphisme induit.
  - ⋆ Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$.
  - ⋆ Composition d'applications linéaires. Bilinéarité de la composition.
  - ⋆ Réciproque d'un isomorphisme.
  - ⋆ Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$. Non commutatif, non intègre. Notation vu au lieu de $v \circ u$. Propriétés générales héritées de la structure d'anneau (dont binôme de Newton en cas d'endomorphismes qui commutent). Groupe $\mathrm{GL}(E)$. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Image et noyau d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Formule $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$.
  - ⋆ Image d'une application linéaire. Formule $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}$ lorsque $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice.
  - ⋆ Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. CNS d'injectivité.
- Détermination d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'une famille génératrice, liée, génératrice. Théorème de caractérisation par l'image d'une base. CNS de surjectivité/injectivité/bijectivité selon que l'image de la base est génératrice/libre/une base.
  - ⋆ Détermination par restriction à ses sous-espaces supplémentaire.
- Projections, projecteurs, symétries, involutions
  - ⋆ Projection p sur F parallèlement à G. Linéarité, formules $p^2 = p$, $\mathrm{Ker}(p) = G = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$, $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$. Projecteurs. Un projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau.
  - ⋆ Symétrie s par rapport à F parallèlement à G. Projecteur associé. Linéarité. Formule $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Une symétrie est un automorphisme qui est sa propre bijection réciproque. Formules $F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$. Involutions linéaires.

Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie (le début)

- Dimension d'un espace vectoriel.
  - ⋆ Notion d'espace vectoriel de dimension finie.
  - ⋆ Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base incomplète/extraite.
  - ⋆ Théorème de l'échange. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée. Critère pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - ⋆ Exemples : espace de dimension 0, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions des EDL homogènes d'ordre 1 ou 2.

  - Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.
  - Familles libres et génératrices en dimension finie. Bases de polynômes échelonnées en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. Application aux suites récurrences linéaires d'ordre 2.

- Sous-espaces vectoriels et dimension.
  - Dimension d'un sous-espace vectoriel. Critère d'égalité de sous-espaces vectoriel en cas d'inclusion et même dimension. Droites vectorielles et plans vectoriels.
  - Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann. CNS pour que deux espaces soient supplémentaires avec la dimension.
  - Rang d'une famille de vecteurs. CNS pour que la famille soit libre/génératrice/une base. Invariance du rang par opérations élémentaires. Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous-familles libres.

- Applications linéaires en dimension finie.
  - Reformulation du théorème de caractérisation par l'image d'une base. Si E est de dimension finie $n \geqslant 2$, alors l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est non commutatif. CNS d'existence d'injections, de surjection, de bijection linéaire de E dans F en comparant les dimensions de E et F.
  - Isomorphismes en dimension finie. CNS pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes avec l'égalité des dimensions. Tout espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. CNS par transformation d'une base en une base. Le rang d'une famille de vecteurs est invariant par isomorphisme.
  - Rang d'une application linéaire.
    - Application linéaire de rang fini. Cas d'un rang nul. Cas d'un espace de départ de dimension finie. CNS d'injectivité avec le rang. CNS de surjectivité avec le rang.
    - Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies (l'injectivité est équivalente à la surjectivité). Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible (pour la composition).
    - En dimension quelconque, si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S, alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang). Théorème du rang quand l'espace de départ est de dimension finie.
    - Invariance du rang par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Le rang d'une composition est majoré par le maximum des deux rangs.