Programme de colles - Semaine n^{o} 24

du 7 au 13 avril 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

28 – Espaces vectoriels

29 – Applications linéaires (*le début*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que $\mathscr{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Montrer que, si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
- Montrer que $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$ pour toute partie A non vide de E.
- Montrer que, si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Démontrer le théorème de caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
- Montrer que, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est libre.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les espaces vectoriels (montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, déterminer une famille génératrice ou une base, montrer qu'une famille est libre, montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires) et le début des application linéaires en fin de colle s'il reste du temps (montrer qu'une application **explicite** est linéaire, déterminer son noyau et son image).

Prévisions pour la semaine 25 (après les vacances) : chapitre 28, 29, 30 (dénombrement).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Cf. programme de la semaine 23.

Chapitre 29 – Applications linéaires

- Notion d'application linéaire.
  - ⋆ Définition. Caractérisation. Condition nécessaire sur l'image de 0. Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{GL}(E)$. Image d'une combinaison linéaire.
  - ⋆ Nombreux exemples. Identité de E. Homothéties de E.
- Opérations sur les applications linéaires.
  - ⋆ Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel. Endomorphisme induit.
  - ⋆ Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$.
  - ⋆ Composition d'applications linéaires. Bilinéarité de la composition.
  - ⋆ Réciproque d'un isomorphisme.
  - ⋆ Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$. Non commutatif, non intègre. Notation vu au lieu de $v\circ u$. Propriétés générales héritées de la structure d'anneau (dont binôme de Newton en cas d'endomorphismes qui commutent). Groupe $\mathrm{GL}(E)$. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Image et noyau d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Formule $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$.
  - ⋆ Image d'une application linéaire. Formule $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}$ lorsque $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice.
  - ⋆ Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. CNS d'injectivité.
- Détermination d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'une famille génératrice, liée, génératrice. Théorème de caractérisation par l'image d'une base. CNS de surjectivité/injectivité/bijectivité selon que l'image de la base est génératrice/libre/une base.
  - ⋆ Détermination par restriction à ses sous-espaces supplémentaire.