Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 23
du 31 mars au 6 avril 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

27 – Séries numériques

28 – Espaces vectoriels (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que, si A est une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient A. Montrer que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
- Montrer les propriétés[1] d'ajout, retrait et remplacement dans un sous-espace engendré.
- Montrer que, si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels distincts, alors la famille $(x \mapsto \mathrm{e}^{a_k x})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
- Montrer que, si on ajoute à une famille libre $\mathscr{L}$ un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$, alors elle reste libre.
- Montrer qu'une famille de polynômes échelonnée en degré est libre.
- Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est directe si et seulement si leur intersection est réduite à $\{0\}$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les séries[2]

Prévisions pour la semaine 24 : chapitre 28 (espaces vectoriels) et début du 29 (applications linéaires).

1. Lorsque $A \neq \varnothing$ est une partie de E,
   - ⋆ Si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
   - ⋆ Si $x \in \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$ (on peut retirer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres).
   - ⋆ Si y est une CL de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.
2. Pas encore de familles sommables.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 27 – Séries numériques

- Cf. programme de la semaine 22.

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Structure d'espace vectoriel
  - ⋆ Rappel sur les vecteurs du plan et de l'espace.
  - ⋆ Loi externe. Exemples usuels.
  - ⋆ Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notion de vecteur, de scalaire, de vecteur nul, d'opposé, de soustraction.
  - ⋆ Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  - ⋆ Exemples usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^D$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$. Produits cartésien d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions de X dans un espace vectoriel.
  - ⋆ Premières propriétés des espaces vectoriel : propriétés héritées des groupes additifs, propriétés des zéros, propriétés de la soustraction, égalité des notations nx et $n \cdot x$.
  - ⋆ Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Vecteurs colinéaires. Familles presque nulles (ou à support fini). Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs (CL avec une famille presque nulle de scalaire). Notion de coefficient devant un vecteur.
- Sous-espaces vectoriels
  - ⋆ Définition comme une partie stable pour $+$ et $\cdot$ qui est encore un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E contient le neutre de E. Caractérisations des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire.
  - ⋆ Interprétation géométrique. Droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires.
  - ⋆ Exemples usuels : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$. Sous-espaces vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\S_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{K})$, $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{K})$.
  - ⋆ Intersection de sous-espaces vectoriels.
  - ⋆ Sous-espace engendré par une partie.
    - — $\mathrm{Vect}(A)$ est défini en tant que l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant comme combinaison linéaire de vecteurs de A.
    - — Sous-espace engendré par une famille. Égalité entre $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ et $\mathrm{Vect}\{x_i \,|\, i \in I\}$ rendant possible de jongler entre partie et famille. Cas particulier d'un ensemble fini, d'une partie finie.
    - — $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. Convention $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$.
    - — Ajouter/retirer un vecteur d'un Vect. Un Vect est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs.
- Familles génératrices, libres, liées, bases.
  - ⋆ Famille/partie génératrice. Opération sur les vecteurs d'une famille génératrice.
  - ⋆ Famille/partie libres ou liées. Notion de combinaison linéaire triviale. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Cas des familles à 1 ou 2 éléments. Convention que $\varnothing$ est libre. Ajouter/retirer un vecteur d'une famille libre. Le cas des familles de polynômes échelonnées en degré. Unicité des coordonnée sur une famille libre.
  - ⋆ Bases d'un espace vectoriel. Exemples des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[K]$ et $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition selon une base

- Somme de sous-espaces vectoriels.
  - ⋆ Notion de somme de deux sous-espaces vectoriels. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel content F_1 et F_2. $F_1 + F_2 = \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$. La concaténation d'une famille génératrice de F_1 et d'une famille génératrice de F_2 est une famille génératrice de $F_1 + F_2$.
  - ⋆ Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F_1 \oplus F_2$. CNS avec l'intersection réduire à 0_E. Théorème de concaténation des bases. Base adaptée à une somme directe.
  - ⋆ Sous-espaces supplémentaires. CNS héritées du paragraphe précédent.