Programme de colles - Semaine n° 22

du 24 au 30 mars 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

26 – Analyse asymptotique

27 – Séries numériques (*le début*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Énoncer et montrer la CNS de convergence d'une série à termes positifs par majoration des sommes partielles et en déduire le théorème de comparaison des séries à termes positifs (pour les inégalités). On expliquera aussi à l'oral pourquoi cela entraîne les théorèmes de comparaison pour les $\sim$, O et o.
- Montrer que, si f est continue, décroissante et positive sur $[n_0\,;+\infty[$, alors

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  et montrer alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ converge.
- Montrer que la convergence absolue entraîne la convergence, ainsi que l'inégalité triangulaire pour les sommes de séries convergentes.
- Énoncer et montrer le critère des séries alternées (pour la démonstration du résultat concernant le reste de la série, on pourra se contenter du cas pair).
- Montrer[1] que, pour toutes suites complexes $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$,

$$\forall N \geqslant n_0, \qquad \sum_{n=n_0}^{N} a_n b_n = a_{N+1}B_N - \sum_{n=n_0}^{N} (a_{n+1} - a_n)B_n,$$

  où, pour tout $n \geqslant n_0$, $B_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k$. Montrer ensuite que, si $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur l'analyse asymptotique avec développements limités (des calculs de DL et/ou l'utilisation de DL à la recherche de développements asymptotiques, notamment de fonctions/suites définies à l'aide d'intégrales, de suites récurrentes, de fonctions réciproques, de suites implicites). En dernière partie de colle, on montrera qu'une série explicite « simple » (typiquement une série de Bertrand, à un équivalent près) converge ou diverge.

Prévisions pour la semaine 23 : chapitre 27 et début du chapitre 28 (espaces vectoriels).

1. C'est le principe de la transformation d'Abel, qui n'est pas au programme, mais l'idée de cette question de colle est que cet argument soit connu.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 26 – Analyse asymptotique

Partie A : Relations de comparaison des suites et des fonctions

- Cf. programme de la semaine 21.

Partie B : Développements limités

- Notion de développement limité.
  - ⋆ Définition. Interprétation. Premiers exemples (réécriture des éuivalents usuels, DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à tout ordre).
  - ⋆ Troncature. Unicité du DL. DL d'une fonction paire/impaire en 0. Se ramener à un DL en 0. Lien avec les équivalents.
  - ⋆ DL avec un O.
- Théorèmes d'existence de développements limités.
  - ⋆ CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1.
  - ⋆ L'existence d'un DL à l'ordre $n \geqslant 2$ n'entraîne pas que f est n fois dérivable.
  - ⋆ Formule de Taylor-Young (réécriture de celle du chapitre précédent).
- Développements limités usuels.
  - ⋆ DL en 0 à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$ et Arctan.
  - ⋆ Exemples du DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à tout ordre.
  - ⋆ DL à l'ordre 3 de $\tan$ en 0.
- Opérations sur les développements limités.
  - ⋆ Combinaison linéaire de DL.
  - ⋆ Produit de DL.
  - ⋆ Méthode pour composer des DL. Utilisation du DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour des quotients de DL.
  - ⋆ Théorème de primitivation d'un DL. Méthode pour dériver un DL.

Partie C : Problèmes d'analyse asymptotique

- Allure locale des graphes
  - ⋆ Position relation d'une courbe à une tangente.
  - ⋆ Condition suffisante d'extremum local.
  - ⋆ Détermination d'asymptotes en $\pm\infty$.
- Développement asymptotique
  - ⋆ Notion de développement asymptotique. Exemple de $\ln(n!)$, exemple d'approximation par l'équation d'une asymptote.
  - ⋆ Exemples de suites et fonctions définies à l'aide d'une intégrale.
  - ⋆ Exemple d'une suite définie par récurrence.
  - ⋆ Exemple d'une suite définie implicitement.
  - ⋆ Exemple de fonction réciproque.

Chapitre 27 – Séries numériques

- Généralités sur les séries numériques.
  - ⋆ Notion de série. Terme général. Somme partielle. Premiers exemples.
  - ⋆ Séries convergentes, divergentes. Somme d'une série convergente. Nature d'une série. Premiers exemples.
  - ⋆ La nature ne dépend pas des premiers termes. Relation de Chasles. Reste d'une série convergente. Changement d'indice $n = k - p$ dans la somme d'une série convergente. Linéarité. Parties réelles/imaginaires d'une série.
  - ⋆ Condition nécessaire de convergence d'une série. Divergence grossière.
  - ⋆ Lien suite-série (série télescopique associée à une suite). Théorème de convergence. Lien limite-somme en cas de convergence.
  - ⋆ Séries géométriques. Séries exponentielles.
- Séries à termes positifs.
  - ⋆ Majoration des sommes partielles.
  - ⋆ Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : avec inégalités, équivalents, o et O.
  - ⋆ Méthode de comparaison série-intégrale. Théorème de convergence. Séries de Riemann.
  - ⋆ Méthodes générales. Exemple des séries de Bertrand.
- Séries absolument convergentes.
  - ⋆ Une série absolument convergente converge. Inégalité triangulaire.
  - ⋆ Théorèmes de comparaison pour les séries absolument convergentes.
  - ⋆ Règle de d'Alembert (HP)
  - ⋆ Utilisation du lien suite/série. Exemple de la constante d'Euler. Preuve de la formule de Stirling.
  - ⋆ Séries semi-convergente. Critère spécial des séries alternées. Exemple de la transformation d'Abel. Quelques mots sur les pathologie des séries semi-convergentes.
- Compléments (HP).
  - ⋆ Existence de la fonction exponentielle
  - ⋆ Existence des fonctions cosinus et sinus.
  - ⋆ Développement décimal d'un réel.