Programme de colles - Semaine n° 21

du 17 au 23 mars 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

25 – Formules de Taylor

26 – Analyse asymptotique

- ⋆ Relations de comparaisons de suites ou de fonctions
- ⋆ Développements limités (*en cours uniquement*)

Ainsi que le chapitre « *hors série* » : groupe symétrique [1].

La colle commencera par un petit exercice simple [2] sur le groupe symétrique consistant à décomposer une permutation explicite en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transposition et enfin à calculer sa signature.

Ensuite une question de cours consistera à écrire le développement limité à tout ordre en 0 de trois des fonctions usuelles au programme [3], choisies par l'examinateur.

Le reste de la colle portera sur :

- des calculs d'équivalents simples de fonctions ou de suites ou de calculs de limites nécessitant l'utilisation d'équivalents [4].
- l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral (pour démontrer une inégalité par exemple) ou l'inégalité de Taylor Lagrange (pour obtenir un encadrement permettant de calculer une limite de somme ou d'intégrale par exemple).

Prévisions pour la semaine 22 : chapitre 26 (analyse asymptotique en entier), début du chapitre 27 (séries numériques).

1. Chapitre réalisé par une étudiante stagiaire en parallèle des chapitres d'analyse actuels.
2. Lorsque nous ferons le chapitre sur le déterminant (chapitre 36), ce sera l'occasion de faire des exercices plus abstraits en colles sur ce thème.
3. DL de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\exp$ à l'ordre n, DL de ch et $\cos$ à l'ordre $2n$ (et même $2n+1$), DL de sh, $\sin$ et Arctan à l'ordre $2n+1$ (et même $2n+2$). Le DL de $\tan$ en 0 n'est exigible qu'à l'ordre 3 (et donc 4).
4. On utilisera en priorité les équivalents simples vus dans la partie A du cours (qui sont en fait des DL à l'ordre 1 sauf pour $\cos - 1$ et $\operatorname{ch} - 1$ qui sont à l'ordre 2). C'est l'occasion de vérifier que les propriétés de o, $\sim$ et O sont maitrisées, principalement quand il faut obtenir l'équivalent d'une somme ou d'une composée.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 25 – Formules de Taylor

- Formule de Taylor avec reste intégral. Caractérisation des fonctions polynomiales. Application à la preuve d'inégalités.
- Inégalité de Taylor-Lagrange. Application : expression de e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ en tant que limite d'une somme.
- Formule de Taylor-Young.

Chapitre 26 – Analyse asymptotique

Partie A : Relations de comparaison des suites et des fonctions

- Suites négligeables.
  - ⋆ Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation o. Cas particulier de $= \mathrm{o}(1)$. Interprétation.
  - ⋆ Réécriture des croissances comparées.
  - ⋆ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o. Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o.
- Suites équivalentes.
  - ⋆ Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation $\sim$. Interprétation.
  - ⋆ Équivalent usuels lorsque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ de : e^{u_n}, $\mathrm{e}^{u_n}-1$, $\ln(1+u_n)$, $(1+u_n)^\alpha-1$, $\mathrm{sh}(u_n)$, $\mathrm{ch}(u_n)$, $\mathrm{ch}(u_n)-1$, $\mathrm{th}(u_n)$, $\sin(u_n)$, $\cos(u_n)$, $\cos(u_n)-1$, $\tan(u_n)$, $\mathrm{Arcsin}(u_n)$, $\mathrm{Arccos}(u_n)$, $\mathrm{Arccos}(u_n)-\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arctan}(u_n)$. Équivalent de $P(n)$ et $P(1/n)$ lorsque $P\in\mathbb{K}[X]$. Formule de Stirling.
  - ⋆ Réflexivité, symétrie, transitivité. Signe dans un équivalent. Théorème d'encadrement pour les équivalents. Produit, quotient, passage à une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module.
  - ⋆ Liens entre $\sim$ et limites.
  - ⋆ Liens entre $\sim$ et o : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.
  - ⋆ Opérations illégales sur les équivalents et comment contourner la loi.
    - — Somme d'équivalents : on repasse par les o
    - — Passage à la fonction (même continue) dans un équivalent. Méthodes pour dans le cas d'un équivalent à une constante, le cas du logarithme, le cas de l'exponentielle, le cas de la composition d'équivalents usuels (tout doit être redémontré).
    - — Passage à une puissance variable : on utilise la notation $u_n^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n \ln(u_n)}$.
    - — Passage à la partie réelle/imaginaire.
- Suites dominées.
  - ⋆ Définition en terme de quotient borné (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation O. Cas particulier de $= \mathrm{O}(1)$. Interprétation.
  - ⋆ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o. Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o.
  - ⋆ Lien entre O, o et $\sim$.
- Comparaison de fonctions
  - ⋆ Fonctions négligeables.
    - — Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).

— Réécriture des croissances comparées.
— Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.

⋆ Fonctions équivalents.

— Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).
— Équivalents usuels en 0 : e^x, $\mathrm{e}^x - 1$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{ch}(x) - 1$, $\mathrm{th}(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $\mathrm{Arcsin}(x)$, $\mathrm{Arccos}(x)$, $\mathrm{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arctan}(x)$.
— Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.

⋆ Fonctions dominées.

— Définition en terme de quotient borné (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).
— Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.

Partie B : Développements limités (*le début*)

- Notion de développement limité.
  - ⋆ Définition. Interprétation. Premiers exemples (réécriture des éuivalents usuels, DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à tout ordre).
  - ⋆ Troncature. Unicité du DL. DL d'une fonction paire/impaire en 0. Se ramener à un DL en 0. Lien avec les équivalents.
  - ⋆ DL avec un O.
- Théorèmes d'existence de développements limités.
  - ⋆ CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1.
  - ⋆ L'existence d'un DL à l'ordre $n \geqslant 2$ n'entraîne pas que f est n fois dérivable.
  - ⋆ Formule de Taylor-Young (réécriture de celle du chapitre précédent).
- Développements limités usuels.
  - ⋆ DL en 0 à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1\pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$ et Arctan.
  - ⋆ Exemples du DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à tout ordre.
  - ⋆ DL à l'ordre 3 de $\tan$ en 0.