Programme de colles - Semaine n^{o} 20

du 10 au 16 mars 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

24 – Intégration sur un segment

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer[1] que, pour toute fonction f continue et positive et non identiquement nulle sur $[a\,;b]$ (avec $a<b$), on a $\int_a^b f > 0$ (on fera aussi un dessin).
- Montrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Détailler[2] la démarche de comparaison somme/intégrale pour une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (on fera aussi un dessin).
- Montrer, en intégrant des sommes géométriques, que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2).$$

- Montrer le théorème de convergence des sommes de Riemann à gauche pour une fonction Lipschitzienne (avec encadrement de l'erreur).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur l'intégration sur un segment (preuve d'inégalités intégrales, étude de fonction définie par une intégrales dont les bornes varient, sommes de Riemann, etc.)

Prévisions pour la semaine 21 : chapitre 25 (Formules de Taylor) et début du chapitre 26 (analyse asymptotique sans DL)

1. On attend la première preuve vue en cours (avec la minoration par l'aire d'un rectangle).
2. On montrera que :

⋆ $\forall k \geqslant 2,\ f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f$

⋆ $\forall k \geqslant 1,\ f(k) \geqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f$

⋆ $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\int_{1}^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_{1}^{n} f.$

Détails des chapitres au programme

Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- Continuité uniforme.
  - ⋆ Limitation à la notion de continuité.
  - ⋆ Fonction uniformément continue (UC). Une fonction UC est continue. Une fonction Lipschitzienne est UC. Exemples et contre-exemples. Méthodes de preuve.
  - ⋆ Le théorème de Heine
- Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux
  - ⋆ Subdivisions. Pas d'une subdivision. Subdivision régulière. Subdivision plus fine.
  - ⋆ Fonctions en escalier sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions en escalier. Notation $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction en escalier.
  - ⋆ Fonctions continue par morceaux sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions continue par morceaux. Notation $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction continue par morceaux. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
  - ⋆ Norme infinie. Inégalité triangulaire. Théorèmes d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier. Convergence uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier.
  - ⋆ Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée). Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a\,;b]} f$. Interprétation géométrique. Cas d'une fonction constante.
  - ⋆ Relation de Chasles. Linéarité. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Inégalité triangulaire.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
  - ⋆ Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers la fonction). Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a\,;b]} f$.
  - ⋆ Relation de Chasles. Linéarité. Valeur moyenne d'une fonction. Partie réelle et imaginaire d'une intégrale. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Propriété de stricte positivité (cas d'une fonction continue). Inégalité triangulaire.
  - ⋆ Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment (bornes dans le mauvais sens, bornes égales).
- Calcul d'intégrales
  - ⋆ Le théorème fondamental de l'analyse. Limite quand on fait converger une borne. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Preuve de l'IAF complexe. Rappel : formule de calcul par différence d'une primitive en les bornes, formule d'IPP, formule de changement de variable.
  - ⋆ Calcul d'intégrale de fonctions continues par morceaux (avec la relation de Chasles).
  - ⋆ Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques.
  - ⋆ Technique de comparaison à une intégrale
  - ⋆ Fonctions et suites définies par une intégrale (cas des bornes variables et intégrande fixe, cas des bornes fixes et intégrande variable).
- Sommes de Riemann
  - ⋆ Sommes de Riemann à gauche et à droite. Théorème de convergence pour les fonctions continues par morceaux. Démonstration dans le cas Lipschitzien avec majoration de l'erreur et dans le cas continu. Remarque sur le cas monotone.
  - ⋆ Sommes de Riemann à pas quelconque (HP)
  - ⋆ Introduction à la méthode des rectangles et des trapèzes