Programme de colles - Semaine n° 19

du 3 au 9 mars 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

23 – Calcul matriciel

Il n'y a pas de questions de cours cette semaine mais la colle commencera, pour chaque élève, par le calcul de l'inverse d'une matrice 3×3 à coefficients entiers avec la méthode du pivot de Gauss (Jordan). Cette méthode doit être respectée à la lettre, les opérations doivent être indiquées, aucune fraction ne doit apparaître sauf éventuellement à la toute dernière étape et aucune interversion de ligne/colonne ne doit avoir lieu si le pivot n'est pas nul.

Le reste de la colle consistera en des exercices sur les matrices (éventuellement faisant suite au calcul effectué dans la première partie de la colle). Pour une matrice de taille quelconque, il est attendu qu'un calcul de produit soit fait avec la formule de la définition du produit (coefficient par coefficient avec une somme) ou avec un théorème du cours comme le binôme de Newton.

Cette colle est aussi l'occasion de refaire des exercices sur les groupes et anneaux.

Prévisions pour la semaine 20 : chapitre 24 (Intégration sur un segment)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 23 – Calcul matriciel

- Notion de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  - ⋆ Notation en forme de tableau à n lignes et p colonnes. Ligne, colonne, coefficient, indice. Notations $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ Matrices/vecteurs lignes, matrices/vecteurs colonnes. Matrices élémentaires. Matrice nulle. Matrice identité.
- Opérations sur les matrices.
  - ⋆ Addition et multiplication par un scalaire. Propriétés générales. Structure de groupe. Matrice scalaire. Combinaison linéaire de matrices. Toute matrice est CL des matrices élémentaires.
  - ⋆ Produit de matrices. Associativité. Non-commutativité. Matrices qui commutent. Bilinéarité. Produit par une matrice scalaire. Produit de deux matrices élémentaires avec le symbole de Kronecker. Produit d'une matrice à gauche ou à droite par une matrice élémentaire. Produit par une matrice colonne : AX est CL des colonnes de A.
  - ⋆ Transposition de matrices. Transposée d'une CL, d'un produit.
- Anneau des matrices carrées de taille n.
  - ⋆ Structure d'anneau. Propriétés des puissances entières (héritées de la structure d'anneau, dont le binôme de Newton et la formule de factorisation $A^p - B^p$).
  - ⋆ Matrices diagonales. Structure d'anneau commutatif. Produit, puissances de matrices diagonales.
  - ⋆ Matrices triangulaires supérieurs/inférieures. Structure d'anneau non-commutatif. Produit de matrices triangulaires supérieurs/inférieures.
  - ⋆ Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de groupe (mais pas d'anneau).
  - ⋆ Matrices inversibles.
    - — Inverse à gauche/droite. Matrice inversible. Si une matrice admet un inverse à gauche ou à droite, elle est inversible (résultat admis pour le moment). Unicité de l'inverse. Groupe linéaire.
    - — Inverse de l'inverse, d'un produit, d'une puissance, d'une transposée, d'une multiplication avec un scalaire.
    - — Le cas particulier d'une matrice 2×2.
    - — Utilisation d'un polynôme annulateur (sans rentrer dans le détail de cette notion) pour le calcul de l'inverse.
    - — Introduction aux matrices nilpotentes.
- Liens entre matrices et systèmes linéaires
  - ⋆ Matrice associée à un système. Un système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est CL des colonnes de A Les solutions de $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, avec X_0 une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
  - ⋆ Opérations élémentaire sur les lignes et les colonnes. Matrices de transvection, de dilatation, de permutation. Traduction des opérations élémentaires en terme de produit à gauche à droite. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
  - ⋆ Système de Cramer. Unique solution $X = A^{-1}B$. Si $AX = 0$ a une solution non nulle, A n'est pas inversible. Cas de deux lignes ou deux colonnes proportionnelles. Une matrice A est inversible si et seulement si, pour tout second membre Y, le système linéaire $Y = AX$ admet une unique solution.
  - ⋆ Cas particulier des matrices diagonales et triangulaires.
  - ⋆ Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de système. Calcul de l'inverse en faisant sur I_n les mêmes opérations et dans le mêmes ordre que celles qui transforment A en en I_n (méthode de Gauss-Jordan). On peut choisir les lignes ou les colonnes mais aucun mélange n'est possible.