Programme de colles - Semaine n^{o} 18

du 9 au 15 février 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

21 – Polynômes

22 – Fractions rationnelles

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Démontrer par récurrence l'existence de la division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul.
- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, a est racine de P d'ordre de multiplicité m si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(a) \neq 0$ et $P = (X-a)^m Q$.
- Énoncer et montrer le théorème de caractérisation de la multiplicité d'une racine avec les dérivées successives.
- Énoncer et montrer le théorème de factorisation d'un polynôme non nul prenant en compte les multiplicités (avec égalité si et seulement si la somme des multiplicités est égale au degré).
- Déterminer[1] le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par n points du plan d'abscisses distinctes.
- Montrer que, lorsque $F = \dfrac{A}{B}$ est sous forme irréductible et λ est un pôle simple de F, alors le coefficient devant $\dfrac{1}{X-\lambda}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\dfrac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$. Appliquer ce résultat pour déterminer la décomposition en élément simple de $\dfrac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les polynômes (en priorité) et les fractions rationnelles (en fin de colle s'il reste du temps).

Prévisions pour la semaine 19 (après les vacances) : chapitre 23 (calcul matriciel)

1. On détaillera toute la recherche de ce polynôme et on montrera qu'il est le seul de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui convient.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 21 – Polynômes

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
  - ⋆ Construction de $\mathbb{K}[X]$. Suites presque nulles. Deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. Polynôme constant.
  - ⋆ Somme, produit et multiplication par un scalaire de polynômes. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif. Puissance de polynômes. Combinaisons linéaires de polynômes.
  - ⋆ Indéterminée X. Notation polynomiale (avec éventuellement une somme faussement infinie). Monôme.
  - ⋆ Degré d'un polynôme. Convention $-\infty$ pour le polynôme nul. Degré d'une somme, d'un produit, d'une multiplication par une constante, d'une puissance.
  - ⋆ Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Les éléments inversibles sont les polynômes constants non nuls.
  - ⋆ Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Stabilité par combinaison linéaire.
  - ⋆ Fonction polynomiale associée. Notation $\widetilde{P}$. Évaluation d'un polynôme. Algorithme de Hörner. L'application $P \longmapsto \widetilde{P}$ est un isomorphisme d'anneau injectif de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.
  - ⋆ Composition de polynômes. Degré d'une composée. Lien avec la composition des fonctions polynomiales associées.
  - ⋆ Dérivée de polynômes. Degré d'une dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'une multiplication par un scalaire, d'une composée. Lien avec la dérivation des fonctions polynomiales associées. Dérivées successives. Formule de Leibniz. Formule de Taylor pour les polynômes.
- Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$.
  - ⋆ Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples. Condition nécessaire sur le degré. Premières propriétés (réflexivité, transitivité, etc.). CNS pour que deux polynômes soient associés.
  - ⋆ Théorème de la division euclidienne. Reste nul si et seulement s'il y a divisibilité.
  - ⋆ PGCDs et PPCMs.
    - — Un PGCD est un diviseur commun de degré maximal. Algorithme d'Euclide. Deux PGCD sont associés. L'unique PGCD unitaire de A et B est noté $A \wedge B$.
    - — Relation de Bezout. Un diviseur de A et B est un diviseur de $A \wedge B$.
    - — Polynômes premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Produit de polynômes premiers avec un autre.
    - — Un PGCD est un multiple non nul commun de degré minimal. Deux PPCM sont associés. L'unique PPCM unitaire de A et B est noté $A \vee B$. Les polynômes $(A \wedge B)(A \vee B)$ et AB sont associés.
    - — Extension de la notion de PGCD à plusieurs polynômes. Associativité. Polynômes premiers entre eux deux à deux ou dans leur ensemble.
  - ⋆ Polynômes irréductibles. Tout polynôme de degré 1 est irréductible. Décomposition en produit de facteurs irréductibles.
- Racines d'un polynôme.
  - ⋆ Notion de racine. Caractérisation par factorisation. Lorsque $a_1, \ldots, a_n$ sont des racines distinctes de P, alors P est divisible par $(X - a_1) \ldots (X - a_n)$.
  - ⋆ Nombre maximal de racines. Rigidité des polynômes. Polynôme avec une infinité de racine. Polynômes coïncidant en plus de racines que leur degré (voire une infinité). Théorème de factorisation de P lorsqu'on connait le coefficient dominant et $\deg(P)$ racines distinctes.
  - ⋆ Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par la factorisation par un polynôme qui ne s'annule pas en la racine. CNS utilisant les dérivées successives. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine, alors son conjugué est encore racine de P de même multiplicité. Théorème de factorisation en comptant les multiplicités.
- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

- $\star$ Polynômes scindés. Le cas des polynômes de degré 2.
- $\star$ Relations coefficients/racines lorsque le polynôme est scindé (formules de Viete).
- $\star$ Théorème de D'Alembert-Gauss. Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Méthodes. Conséquences sur la divisibilité.
- $\star$ Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Méthodes.

- Polynôme d'interpolation de Lagrange

Chapitre 22 – Fractions rationnelles

- Le corps $\mathbb{K}(X)$.
  - $\star$ Définition de $\mathbb{K}(X)$. Notation sous forme de fraction. Condition d'égalité de deux fractions rationnelles en terme de produit polynomial. Opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$. Structure de corps. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ est un morphisme d'anneau injectif permettant d'« identifier » P à $\dfrac{P}{1}$ et $\mathbb{K}[X]$ à un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$. Simplification de fractions rationnelles. Forme irréductible (existence et unicité). CNS pour qu'une fraction rationnelle soit un polynôme.
  - $\star$ Degré d'une fraction rationnelle. Extension de $+$ et de $\leqslant$ de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Degré d'un produit, degré d'une somme, degré d'une puissance.
  - $\star$ Partie entière d'une fraction rationnelle F. Il s'agit du reste de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
  - $\star$ Zéros et pôles d'une fraction rationnelle (écrite sous forme irréductible). Multiplicité.
  - $\star$ Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle (écrite sous forme irréductible).
- Décomposition en éléments simples.
  - $\star$ Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.
  - $\star$ Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.
  - $\star$ Techniques pour trouver les coefficients de la décomposition. Lorsque a est un pôle de multiplicité m, multiplication par $(X-a)^m$ et évaluation en a. Rappel des techniques sur les fonctions rationnelles vues dans le chapitre 9.
  - $\star$ Si λ est un pôle simple, le coefficient devant $\frac{1}{X-\lambda}$ dans la DEES de $\frac{A}{B}$ (forme irréductible) est $\frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.
  - $\star$ DEES de $\frac{P'}{P}$.