

Programme de colles - Semaine n° 16

du 27 janvier au 2 février 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

19 – Dérivation

20 – Fonctions convexes (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Énoncer et montrer l'inégalité de Jensen¹.
- Montrer que f est convexe² sur I si et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.
- Montrer qu'une fonction convexe sur I est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\overset{\circ}{I}$ et conclure que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
- Montrer que, si f est convexe sur $\overset{\circ}{I}$ et continue sur I , alors f est convexe sur I .
- Montrer que, si f est dérivable et $f' \geq 0$ sur I , alors f est convexe sur I .
- Montrer que, si f est convexe sur I si et seulement si le graphe de f est au dessus de toutes ses tangentes.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur la dérivabilité.



Pas de colles la semaine 17.

Prévisions pour la semaine 18 : chapitre 21 (polynômes) et chapitre 22 (fractions rationnelles)

1. Si f est convexe sur I alors, pour tout $n \geq 2$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

2. Pour le sens direct, pour gagner du temps, on pourra utiliser l'inégalité des trois pentes sans démonstration mais en l'illustrant avec un dessin.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 19 – Dérivation

- Cf. programme de la semaine 14.

Chapitre 20 – Fonctions convexes

- Préliminaires géométriques.
 - ★ Paramétrage de segments de \mathbb{R} et du plan avec $[0; 1]$.
 - ★ Arcs et cordes d'une fonction.
- Résultats généraux sur les fonctions convexes.
 - ★ Fonctions convexes/concaves. Interprétation géométriques avec les cordes au dessus/en dessous des arcs. Premiers exemples.
 - ★ Inégalité de Jensen. Cas particulier de l'image de la moyenne comparée à la moyenne des images. Exemple de l'inégalité arithmético-géométrique.
 - ★ Combinaison linéaire positive de fonctions convexes.
 - ★ Inégalité des pentes. Croissance des pentes.
 - ★ Régularité des fonctions convexes (HP) : une fonction convexe sur I est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I . Une fonction convexe sur I est continue sur l'intérieur de I . Une fonction convexe sur l'intérieur de I continue sur I est convexe sur I .
- Fonctions convexes ou concaves dérivables
 - ★ Une fonction dérivable sur I est convexe si et seulement sa dérivée est croissante. Une fonction deux fois dérivable sur I est convexe si et seulement sa dérivée seconde est positive.
 - ★ Point d'inflexion. Caractérisation dans le cas d'une fonction deux fois dérivable.
 - ★ Convexité et tangentes. Application (HP) aux minima globaux.