Programme de colles - Semaine n° 15

du 20 au 26 janvier 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

18 – Limites et continuité

19 – Dérivation

- ⋆ Dérivabilité
- ⋆ Dérivées successives
- ⋆ Accroissements finis (*en cours uniquement*)
- ⋆ Extension aux fonctions à valeurs complexes (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Énoncer et montrer le théorème de Rolle [1] puis l'égalité des accroissements finis. Illustrer ce dernier avec un dessin.
- Montrer que, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.
- Donner la définition d'une fonction Lipschitzienne. Illustrer avec un dessin. Énoncer et montrer l'inégalité des accroissements finis.
- Montrer que $\dfrac{1}{\ln(n)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
- Donner des hypothèses sur une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge avec vitesse exponentielle [2] (en justifiant bien sûr). Déterminer alors un entier n tel que u_n est une approximation de sa limite à ε près (où $\varepsilon > 0$).
- Énoncer et montrer le théorème de la limite de la dérivée.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les limites et la continuité (et le début de la dérivabilité), par exemple :

- utilisation du TVI ou du théorème des bornes atteintes,
- étude de suites ou fonctions implicites,
- étude de recollement continue et dérivable (où il faut calculer le taux d'accroissements, regarder éventuellement les limite à gauche/droite, etc.) en des points qui échappent aux théorèmes d'opérations usuels.

Prévisions pour la semaine 16 : chapitre 19 et chapitre 20 (convexité)

1. En admettant que, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, si a n'est pas une extrémité de I et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
2. C'est-à-dire il existe $\ell \in \mathbb{R}$, $M \in \,]0\,;1[$ et $A > 0$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant A \times M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 18 – Limites et continuité

- Cf. programme de la semaine 14.

Chapitre 19 – Dérivation

- Dérivabilité.
  - ⋆ Taux d'accroissement. Fonction dérivable en un point, sur un domaine. Fonction dérivée. Notation $\mathscr{D}^1(D,\mathbb{R})$. Premiers exemples de calculs de limite de taux d'accroissement.
  - ⋆ Interprétation géométrique. Tangente en un point. Équation de la tangente. Cas d'une tangente verticale.
  - ⋆ Développement limité d'ordre 1. Une fonction dérivable est continue.
  - ⋆ Dérivabilité à droite et à gauche. Application au raccordement de solutions d'équations différentielles.
  - ⋆ Opérations algébriques, combinaisons linéaires, dérivée d'un produit d'un nombre fini quelconque de fonctions. Dérivée d'une composition. Dérivée d'une réciproque. Tangente en un point de la courbe de la réciproque. Avertissement concernant le fait que ce sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.
- Dérivées successives.
  - ⋆ Fonctions dérivables n fois, de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Notations $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Liens entre ces notions.
  - ⋆ Opérations sur les dérivées successives. Formule de Leibniz.
- Accroissements finis
  - ⋆ Condition nécessaire pour qu'un point intérieur soit un extremum local.
  - ⋆ Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Interprétations géométriques.
  - ⋆ Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones. Le cas des fonctions strictement monotones.
  - ⋆ Introduction à la notion de fonction Lipschitzienne. Interprétation géométrique. Une fonction Lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis : une fonction dérivable dont la dérivée est bornée par K est K-Lipschitzienne. Autres versions de l'IAF (cas d'une dérivée minorée, majorée).
  - ⋆ Application à l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
  - ⋆ Théorème de la limite de la dérivée. Cas dérivable, cas $\mathscr{C}^1$, cas des limites $\pm\infty$.
- Extension aux fonction à valeurs complexes.
  - ⋆ Lien avec les fonctions partie réelle et partie imaginaire.
  - ⋆ Extension de certains résultats. Le théorèmes de Rolle et l'EAF ne sont plus valables. L'IAF reste valable (avec des modules), ainsi que la caractérisation des fonctions constantes et le théorème de la limite de la dérivée.