

# Programme de colles - Semaine n° 14

du 13 au 19 janvier 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

17 – Groupes et anneaux

18 – Limites et continuité (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  et déterminer  $U(\mathbb{Z}[i])$ .
- Montrer le sens indirect du théorème de caractérisation séquentielle de la limite (dans le cas d'une limite  $+\infty$  en un réel adhérent au domaine de définition).
- Montrer que, si  $f$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifie  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $f$  est linéaire.
- Montrer le TVI avec la méthode de la dichotomie<sup>1</sup>
- Montrer le TVI avec le théorème de la borne supérieure.
- Montrer le théorème des bornes atteintes.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les groupes et les anneaux.

## Prévisions pour la semaine 15 : chapitre 18 et chapitre 19 (dérivation)

---

1. On se contentera de lister les propriétés des deux suites construites (pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq a_{n+1}$ ,  $b_{n+1} \leq a_n$ ,  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$  et  $f(a_n) \leq m \leq f(b_n)$ ) en les justifiant brièvement à l'oral, avant de poursuivre la preuve.

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 17 – Groupes et anneaux

- Lois de composition interne (LCI).
  - ★ Notion de LCI sur un ensemble non vide  $E$ .
  - ★ Lois commutatives, associatives. Convention de notation additive/multiplicative. En notation additive, la loi est toujours commutative. Notations  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x \in E$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  lorsque la loi est associative. Extension de quelques propriétés attendues (mais attention quand la loi n'est pas commutative). Éléments qui commutent.
  - ★ Distributivité. Distributivité à gauche/droite.
  - ★ Élément neutre (à gauche et à droite). Unicité. Notations  $0_E$  et  $1_E$ .
  - ★ Élément symétrisable (à gauche et à droite). Symétrique, opposé, inverse. Notation  $-x$  ou  $x^{-1}$ . Inverse d'un produit, d'une puissance, d'un inverse. Simplification à gauche ou à droite par un élément symétrisable. Notation  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x$  est symétrisable et  $n \in \mathbb{Z}$ . Convention que  $x^0$  (ou  $0x$  en additif) est l'élément neutre.
  - ★ Partie stable d'une LCI. Conservation des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité.
  - ★ Lois produits.
- Groupes.
  - ★ Notion de groupe. Groupe abélien. Simplification à gauche ou à droite par un élément d'un groupe.
  - ★ Groupe symétrique : groupe des permutations de  $E$  (bijection de  $E$  dans  $E$ ). Notation  $S_E$ .
  - ★ Groupes produits.
  - ★ Sous-groupes. Un sous-groupe contient l'élément neutre et les symétriques de ses éléments. Caractérisation des sous-groupes (non vide et stabilité par inverse et produit).
  - ★ Avant goût de la 2A : Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ . Intersection de sous-groupes.
  - ★ Morphismes de groupes.
    - Image du neutre, image d'un inverse, image d'une puissance. Composition de morphismes.
    - L'image d'un sous-groupe est un sous-groupe. L'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
    - Image d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Im}(f)$ .
    - Noyau d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Ker}(f)$ . CNS d'injectivité.
    - Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupes isomorphes.
- Anneaux
  - ★ Notion d'anneau. Anneau commutatif. Anneau produit.
  - ★  $0_A$  est absorbant. Cas où  $0_A = 1_A$ . Règles de calcul dans un anneau. Formule de factorisation de  $a^n - b^n$  et formule du binôme de Newton lorsque  $a$  et  $b$  commutent.
  - ★ Diviseurs de zéro. Anneau intègre. Simplification à gauche ou à droite par un élément non nul dans un anneau intègre.
  - ★ Éléments inversibles d'un anneau. Anneau  $U(A)$  des éléments inversibles de  $A$ . Notion de corps.
  - ★ Sous-anneaux (⚠ un sous-anneau contient  $1_A$ ). Caractérisation des sous-anneaux (contient  $1_A$ , stabilité par soustraction et par produit). Un mot sur les sous-corps.
  - ★ Morphismes d'anneaux (⚠ envoie  $1_A$  sur  $1_{A'}$ ). Un mot sur les morphismes de corps. Propriétés hérités des morphismes de groupes (additifs). Image d'une puissance. Image directe, image réciproque. Isomorphisme.
  - ★ Activité : construction de  $\mathbb{C}$ .

## Chapitre 18 – Limites et continuité

- Notion de limite d'une fonction.
  - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en  $\pm\infty$ . Limites de  $x \mapsto x^n$  lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en un réel  $a$ . Si  $f$  admet une limite finie en un point de son domaine de définition, alors la limite est  $f(a)$ .
  - ★ Définition universelle avec des voisinages. Exemple de fonction n'admettent pas de limite. Limites des  $f(a+h)$  lorsque  $h$  tend vers 0.
  - ★ Unicité de la limite.
  - ★ Limite à gauche, à droite en  $a$ . Lien avec les limites selon que  $f$  est définie en  $a$  ou non.
- Limites et relation d'ordre.
  - ★ Si  $f$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ . Variantes.
  - ★ Passage à la limite dans une inégalité large.
- Opérations sur les fonctions admettant une limite.
  - ★ Combinaisons linéaires, valeurs absolue, produit, inverse, quotient.
  - ★ Composition de deux fonctions. Composition d'une suite par une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorèmes d'existence de limites.
  - ★ Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
  - ★ Théorème de la limite monotone.
- Continuité.
  - ★ Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Continuité sur un domaine. Continuité de la fonction  $x \mapsto x^n$ .
  - ★ Prolongement par continuité.
  - ★ Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, caractérisation séquentielle.
- Le théorème des valeurs intermédiaires.
  - ★ TVI sur un segment. Preuve par dichotomie. Preuve avec borne supérieure. Implémentation en Python.
  - ★ Autres versions du TVI. L'image d'un intervalle par une fonction continue et un intervalle.
  - ★ Apport de la stricte monotonie : corollaire du TVI, théorème de la bijection. Comment obtenir  $f(I)$ ? Si  $f$  est continue et injective, alors  $f$  est strictement monotone.
  - ★ Application à l'étude des suites implicites. Cas où  $f(u_n) = n$ . Cas où  $f_n(u_n) = 0$ .
- Le théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes. Lien avec les limites et la continuité des parties réelles et imaginaires.