

# Programme de colles - Semaine n° 13

du 6 au 12 janvier 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 16 – Relations binaires
- 17 – Groupes et anneaux
  - ★ Lois de composition interne
  - ★ Groupes

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  contient le neutre de  $G$  (et que celui-ci est son élément neutre) et que le symétrique de tout élément de  $H$  appartient à  $H$ .
- Montrer que, si  $H$  est une partie non vide d'un groupe  $G$  qui est stable par produit/inverse, alors  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .
- Montrer que l'image directe d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  par un morphisme de groupe  $f : G \longrightarrow G'$  est un sous-groupe de  $G'$ .
- Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe  $K$  de  $G'$  par un morphisme de groupe  $f : G \longrightarrow G'$  est un sous-groupe de  $G$ . Donner la définition de  $\text{Ker}(f)$ .
- Montrer qu'un morphisme de groupe  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{e\}$  (où  $e$  désigne le neutre du groupe de départ).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les relations d'ordre, d'équivalence et sur les lois de compositions internes et les groupes.

**Prévisions pour la semaine 14 :** chapitres 17 (en entier, avec les anneaux donc) et chapitre 18 (limites et continuité)

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 16 – Relations binaires

cf. programme de la semaine 12

## Chapitre 17 – Groupes et anneaux (le début)

- Lois de composition interne (LCI).
  - ★ Notion de LCI sur un ensemble non vide  $E$ .
  - ★ Lois commutatives, associatives. Convention de notation additive/multiplicative. En notation additive, la loi est toujours commutative. Notations  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x \in E$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  lorsque la loi est associative. Extension de quelques propriétés attendues (mais attention quand la loi n'est pas commutative). Éléments qui commutent.
  - ★ Distributivité. Distributivité à gauche/droite.
  - ★ Élément neutre (à gauche et à droite). Unicité. Notations  $0_E$  et  $1_E$ .
  - ★ Élément symétrisable (à gauche et à droite). Symétrique, opposé, inverse. Notation  $-x$  ou  $x^{-1}$ . Inverse d'un produit, d'une puissance, d'un inverse. Simplification à gauche ou à droite par un élément symétrisable. Notation  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x$  est symétrisable et  $n \in \mathbb{Z}$ . Convention que  $x^0$  (ou  $0x$  en additif) est l'élément neutre.
  - ★ Partie stable d'une LCI. Conservation des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité.
  - ★ Lois produits.
- Groupes.
  - ★ Notion de groupe. Groupe abélien. Simplification à gauche ou à droite par un élément d'un groupe.
  - ★ Groupe symétrique : groupe des permutations de  $E$  (bijection de  $E$  dans  $E$ ). Notation  $S_E$ .
  - ★ Groupes produits.
  - ★ Sous-groupes. Un sous-groupe contient l'élément neutre et les symétriques de ses éléments. Caractérisation des sous-groupes (non vide et stabilité par inverse et produit).
  - ★ Avant goût de la 2A : Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ . Intersection de sous-groupes.
  - ★ Morphismes de groupes.
    - Image du neutre, image d'un inverse, image d'une puissance. Composition de morphismes.
    - L'image d'un sous-groupe est un sous-groupe. L'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
    - Image d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Im}(f)$ .
    - Noyau d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Ker}(f)$ . CNS d'injectivité.
    - Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupes isomorphes.