Programme de colles - Semaine n$^{\text{o}}$ 12

du 16 au 22 décembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

15 – Ensembles et applications

16 – Relations binaires (*en cours uniquement)*

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que, lorsque $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$,
  - $\star$ si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.
  - $\star$ si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (avec un exemple où g n'est pas injective).
- Montrer que, lorsque $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$,
  - $\star$ si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.
  - $\star$ si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective (avec un exemple où f n'est pas surjective).
- Montrer que, si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ vérifient $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, avec f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$.
- Montrer que $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < \sqrt{2}\}$ (vue comme une partie de $\mathbb{Q}$) n'admet pas de borne supérieure pour l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Q}$.
- Montrer que, toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(E)$, admet $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathscr{A}} X$ pour borne supérieure.
- Déterminer $\sup\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de l'ordre lexicographique puis de l'ordre produit. Montrer que c'est un $\max$ dans le premier cas mais pas dans le deuxième.
- Montrer que les classes d'équivalences pour une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble E forment une partition de E (en montrant au préalable que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ si et seulement si $x \sim y$).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les ensembles et applications.

Prévisions pour la semaine 13 (après les vacances) : chapitres 15, 16, 17 (début de groupes et anneaux)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 15 – Ensembles et applications

- Rappels et compléments sur les ensembles.
  - ⋆ Notion d'ensemble et d'éléments. Appartenance. Égalité d'ensembles. Ensemble vide. Définition par extension, par compréhension, par opérations. Singleton.
  - ⋆ Produit cartésien. Famille d'éléments. Sous-famille, sur-famille, concaténation de familles.
  - ⋆ Parties d'un ensemble.
    - — Inclusion. Inclusion stricte. Double inclusion. L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble et ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même.
    - — Ensemble des parties d'un ensemble.
    - — Union et intersection de parties. Propriétés (dont commutativité, associativité, distributivité). Union et intersection des parties d'une famille. Union disjointe. Partitions et recouvrements.
    - — Complémentaire d'une partie. Lois de Morgan. Différence de parties.
- Résultats généraux sur les applications.
  - ⋆ Notion de fonction ou application (notions confondues). Image d'un élément. Ensembles de départ et d'arrivée. Notations. Ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ ou E^F des fonctions de E dans F. Antécédents. Retour sur les familles d'éléments. Fonctions égales. Graphe d'une fonction.
  - ⋆ Application identité. Application constante. Fonction indicatrice (caractérisation de l'inclusion, de l'égalité, des opérations ensemblistes).
  - ⋆ Image directe. Image réciproque.
  - ⋆ Restriction et prolongements. Composition de fonctions. Composition avec une indicatrice. Associativité de la composition.
- Injections, surjections, bijections.
  - ⋆ Injection. Définition en terme d'antécédents, définitions quantifiées. Méthodes de preuve. Cas des fonctions monotones sur un intervalle.
  - ⋆ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Lien avec l'image directe. Méthodes de preuve.
  - ⋆ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Méthodes de preuve.
  - ⋆ Composition d'injections, de surjections, de bijections.
  - ⋆ Réciproque d'une bijection. Théorème de caractérisation. Réciproque d'une composition. Retour sur la notation $f^{-1}(B)$.
  - ⋆ Retour sur les changements d'indice.
- Ensembles équipotents (HP)

Chapitre 16 – Relations binaires

- Résultats généraux sur les relations binaires.
  - ⋆ Définition en tant que partie de E^2. Notation $x\mathcal{R}y$.
  - ⋆ Exemples : égalité sur E, $\leqslant$ et $<$ sur $\mathbb{R}$, $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$, $\leqslant$ sur $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\equiv [m]$ sur $\mathbb{R}$, divisibilité sur $\mathbb{Z}$, etc.
  - ⋆ Relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
- Les relations d'ordre.
  - ⋆ Définition. Exemples. Relation stricte associée à une relation d'ordre.
  - ⋆ Exemples de l'ordre produit et de l'ordre lexicographique sur un produit cartésien.
  - ⋆ Ordre total. Ordre partiel.

    - ⋆ Majorants, minorants, maximum, minimum. Borne supérieure, borne inférieure. Un maximum est une borne supérieure. Un minimum est une borne inférieure.

- Les relations d'équivalence.
    - ⋆ Définition. Exemples.
    - ⋆ Classe d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.
    - ⋆ Introduction aux ensembles quotients. Exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.