

# Programme de colles - Semaine n° 10

du 2 au 8 décembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

13 – Propriété de la borne supérieure

14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

Partie B : Limite d'une suite réelle (sauf paragraphe VII)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer l'unicité de la limite d'une suite (dans le cas des limites finies).
- Montrer que  $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  lorsque  $q \in ]-1; 1[$  et  $q^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  lorsque  $q \in ]1; +\infty[$ .
- Montrer que :
  - ★ une suite qui tend vers  $+\infty$  est minorée et non majorée.
  - ★ les termes d'une suite qui converge vers  $\ell \in ]a; b[$ , appartiennent à  $]a; b[$  à partir d'un certain rang (lorsque  $a < b$  sont des réels).
- Montrer que, si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_-^*$  et  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .
- Montrer le théorème de la limite monotone (le cas croissant).
- Montrer le théorème de convergence des suites adjacentes.
- Montrer<sup>1</sup>, pour tous  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , l'existence de la racine  $p^{\text{ième}}$  de  $y$ .

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) :

- commencera par expliciter (modulo quelques transformations) le terme général d'une suite arithmético-géométrique (en redémontrant la formule) ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (théorème admis pour le moment) réels ou complexes.
- poursuivra par des exercices de calcul de limites et d'utilisation de limites.

## Prévisions pour la semaine 11 : chapitre 14 en entier

1. Cela a été montré en deux temps : dans le chapitre 13, on a vu que  $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^p \leq y\}$  admettait une borne supérieure  $M_y$  puis, dans le chapitre 14, on a montré que  $M_y^p = y$  en utilisant la caractérisation séquentielle.

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

cf. programme de la semaine 9

## Chapitre 14 – Suites numériques

### Partie A : Résultats généraux

- Notion de suite réelle.
  - ★ Fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Notation  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Suite démarrant au rang  $n_0$ . Représentation graphique.
  - ★ Différents modes de définition d'une suite : explicitement, par récurrence ou implicitement.
  - ★ Propriétés vraies à partir d'un certain rang.
- Opérations algébriques sur les suites.
- Propriétés générales sur les suites réelles.
  - ★ Suites constantes, stationnaires, périodiques.
  - ★ Suites positives, négatives.
  - ★ Suites monotones. Méthodes pour étudier les variations d'une suite. Somme de suites monotone de même monotonie.
  - ★ Suites majorées, minorées, bornées.
- Extension aux suites complexes. Suite complexe bornée.
- Exemples usuels.
  - ★ Suite définie par une relation de récurrence additive ou multiplicative.
  - ★ Suites arithmétiques (complexes ou réelles).
  - ★ Suites géométriques (complexes ou réelles).
  - ★ Suites arithmético-géométriques (complexes ou réelles). Méthode du point fixe.
  - ★ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Expression explicite dans les cas complexe. Expression explicite dans les cas réel.

### Partie B : Limite d'une suite réelle

- Notion de limite d'une suite réelle
  - ★ Limite finie/infinie. Définition quantifiée. Représentation graphique. Définition universelle avec des voisinages.
  - ★ Unicité de la limite. Notations  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (cette dernière est dangereuse).
  - ★ Exemples fondamentaux.
  - ★ Suites convergentes, divergentes.
  - ★ Suites extraites. Extractrice. Si une suite admet une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , alors toute suite extraite admet la même limite. Limite d'une suite si et seulement si les suites des termes de rangs pairs et impairs admettent la même limite.
- Limites et relation d'ordre.
  - ★ Propriété d'ordre transmise par la limite. Une suite réelle convergente est bornée. Une suite qui a une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang. Exemples de propriétés analogues.
  - ★ Passage à la limite dans une inégalité large. Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.
- Opérations sur les suites admettant une limite.

- ★ Opérations algébriques : somme, multiplication externe, produit, inverse, quotient. Limites  $0^+$  et  $0^-$ . Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 tend aussi vers 0. Cas des suites arithmétiques et géométriques.
- ★ Composition d'une suite par une fonction. Cas d'une fonction continue. Exemple de la valeur absolue. Exemple du passage à la puissance.
- ★ Formes indéterminées. Croissances comparées. Méthodes pour lever les formes indéterminées (factoriser par le terme le plus gros, utiliser des taux d'accroissement, multiplier par la quantité conjuguée).
- Théorèmes d'existence d'une limite.
  - ★ Théorème d'encadrement. Théorème de minoration, de majoration.
  - ★ Théorème de la limite monotone.
  - ★ Suites adjacentes.
  - ★ Exemple de la suite des intégrales de Wallis.
- Traduction séquentielle de certaines propriétés.
  - ★ Si  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide majorée (respectivement non majorée), il existe une suite d'éléments de  $A$  qui tend vers  $\sup(A)$  (respectivement vers  $+\infty$ ). Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure.
  - ★ Caractérisation séquentielle de la densité. Ensemble  $\mathbb{D}$  des nombre décimaux. Valeurs décimales approchées par défaut et pas excès à la précision  $10^{-n}$  d'un réel. Les ensembles  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{D}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ .
- Extension aux suites complexes.