Feuille de TP n° 5

Fonctions de deux variables – Deuxième partie (correction)

Exercice 1. Reprendre l'exercice 2 du TP n° 2 et conjecturer la nature locale des points critiques des différentes fonctions à l'aide du signe des valeurs propres de la Hessienne obtenu avec Python. Puis le démontrer.

Correction :

1) La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + xy + y^3$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = \big(3x^2 + y, x + 3y^2\big)$. On a vu dans le TP n° 2 qu'elle admet deux points critiques $(0, 0)$ et $(-1/3, -1/3)$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$.

```python
def Hessf(x,y):
    d11=6*x#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (1,1)
    d22=6*y#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (2,2)
    d12=1#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (1,2)
    return np.array([[d11,d12],[d12,d22]])
import numpy.linalg as al
al.eig(Hessf(0,0))[0]
al.eig(Hessf(-1/3,-1/3))[0]
```

On trouve -1 et 1 pour les valeurs propres de $\nabla^2 f(0, 0)$ donc on conjecture que $(0, 0)$ est un point col. On trouve -3 et -1 pour les valeurs propres de $\nabla^2 f(-1/3, -1/3)$ donc on conjecture que f admet un maximum local en $(-1/3, -1/3)$. Montrons-le :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f(0, 0) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est non inversible si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; 1\}$. On en déduit que $\nabla^2 f(0, 0)$ admet -1 et 1 pour valeurs propres. Elles sont de signes opposés donc $(0, 0)$ est un point col.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla^2 f(-1/3, 1/3) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$. Cette matrice est non inversible si et seulement si $(-2-\lambda)^2 - 1 = 0$ si et seulement si $(2+\lambda-1)(2+\lambda+1) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{-3; -1\}$. On en déduit que $\nabla^2 f(-1/3, 1/3)$ admet -3 et -1 pour valeurs propres. Elles sont toutes les deux strictement négatives donc f admet un maximum local en $(-1/3, -1/3)$.

2) La fonction $f : (x, y) \longmapsto \sin(x) + y^2 - 2y + 1$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = (\cos(x), 2y - 2)$. On a vu dans le TP n° 2 qu'il y a une infinité de points critiques : tous les $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Nul besoin de Python ici !

- Si k est pair, $\nabla^2 f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet -1 et 2 pour valeur propres donc $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$ est un point selle.
- Si k est impair, $\nabla^2 f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet 1 et 2 pour valeur propres donc f admet un minimum local en $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 1\right)$.

3) La fonction $(x,y) \longmapsto xy - x^2y - xy^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \big(y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy\big)$. On a vu dans le TP n° 2 qu'il y a donc quatre points critiques $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1/3,1/3)$.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$.

```
def Hessf(x,y):
    d11=-2*x#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (1,1)
    d22=-2*y#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (2,2)
    d12=1-2*x-2*y#dérivée partielle d'ordre 2 d'indice (1,2)
    return np.array([[d11,d12],[d12,d22]])
import numpy.linalg as al
al.eig(Hessf(0,0))[0]
al.eig(Hessf(0,1))[0]
al.eig(Hessf(1,0))[0]
al.eig(Hessf(1/3,1/3))[0]
```

On trouve 0 pour valeur propre de $\nabla^2 f(0,0)$ donc on ne peut rien conjecturer. On trouve deux réels de signes opposés pour valeurs propres de $\nabla^2 f(0,1)$ et $\nabla^2 f(1,0)$ donc on conjecture que $(0,1)$ et $(1,0)$ sont des points cols. On trouve $-1/2$ et -1 pour les valeurs propres de $\nabla^2 f(1/3,1/3)$ donc on conjecture que f admet un maximum local en $(1/3,1/3)$. Montrons-le :

- On a $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Seule 0 est valeur propre. On ne peut rien conclure avec le théorème du cours.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\nabla^2 f(0,1) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible si et seulement si $(-1-\lambda)(-\lambda)-1 = 0$ si et seulement si $\lambda^2+\lambda-1 = 0$ si et seulement si $\lambda \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Les valeurs propres sont de signes distincts donc $(0,1)$ est un point col.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\nabla^2 f(1,0) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible si et seulement si $(-\lambda)(-1-\lambda)-1 = 0$ si et seulement si $\lambda^2+\lambda-1 = 0$ si et seulement si $\lambda \in \left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Les valeurs propres sont de signes distincts donc $(1,0)$ est un point col.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\nabla^2 f(1/3,1/3) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -2/3-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible si et seulement si $(-2/3-\lambda)^2 - (1/3)^2 = 0$ si et seulement si $(1+\lambda)(1/3+\lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; -1/3\}$. Les valeurs propres sont toutes les deux strictement négatives donc f admet un maximum local en $(1/3,1/3)$.

4) **A VENIR**

5) **A VENIR**

6) **A VENIR**

Exercice 2. Soient $f : (x,y) \longmapsto x^2 + 4x - 4y^2 - 3$ et $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y = 1\}$.

1) Reproduire la figure de l'exemple ci-dessus à l'aide de Python.
2) Démontrer que f admet bien $(2,-1)$ pour point critique de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.
3) Montrer que f admet un maximum global en $(-2,1)$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

Correction :

1) Les points $(-3,4)$ et $(5,-4)$ appartiennent à la contrainte. Il suffit de les relier.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.arange(-10,7.5,0.01)
Y = np.arange(-4,4,0.01)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)
```

```

def f(x,y):
    return x**2+4*x-4*y**2-3
f=np.vectorize(f)
Z=f(X,Y)

cp=plt.contour(X,Y,Z,[-11,-7,-3,-1,5,9])
plt.clabel(cp,fontsize=7)

plt.plot([-3,5],[4,-4],'r')
plt.show()
```

2) La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + 4x - 4y^2 - 3$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\nabla f(x, y) = (2x + 4, -8y)$

On a $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 1\}$ avec $g : (x, y) \longmapsto x + y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\nabla g(x, y) = (1, 1)$ donc

$$
\begin{aligned}
(x, y) \text{ est critique sous } \mathscr{C} \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x, y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x, y) \in \operatorname{Vect}(\nabla g(x, y)) \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (x, y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 4 = \lambda \\ -8y = \lambda \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda - 4}{2} - \dfrac{\lambda}{8} = 1 \\ 2x + 4 = \lambda \\ -8y = \lambda \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 8 \\ x = \dfrac{\lambda - 4}{2} = 2 \\ y = -\dfrac{\lambda}{8} = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi f admet bien $(2, -1)$ pour unique point critique de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.

3) Soit $(x, y) \in \mathscr{C}$. On a $(a, b) = (x, y) - (2, -1) \in \mathscr{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et

$$
\begin{aligned}
f(x, y) - f(2, -1) &= f((2, -1) + (a, b)) - f(2, -1) \\
&= f(2 + a, -1 - a) - f(2, -1) \\
&= (2 + a)^2 + 4(2 + a) - 4(-1 - a)^2 - 3 - (4 + 8 - 4 - 3) \\
&= 4 + 4a + a^2 + 8 + 4a - 4(1 + 2a + a^2) - 8 = -3a^2 \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi f admet un maximum global en $(-2, 1)$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

Exercice 3. Soient $f : (x, y) \longmapsto 2x^3 - 3x^2y - 6x + y^3$ et $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\}$.

1) Représenter les lignes de niveaux de f et la droite $\mathscr{C}$. Conjecturer la présence d'un point critique pour f sous la contrainte $\mathscr{C}$.
On pourra restreindre le tracé au rectangle $[-6\,;4] \times [-5\,;3]$ et on fera en sorte que le niveau -3 soit représenté.
2) Démontrer que f admet bien un unique point critique de f sous la contrainte $\mathscr{C}$
3) Montrer que f admet un unique minimum global sous la contrainte $\mathscr{C}$.

Correction :

1) Les points $(-1, 3)$ et $(3, -5)$ appartiennent à la contrainte. Il suffit de les relier.

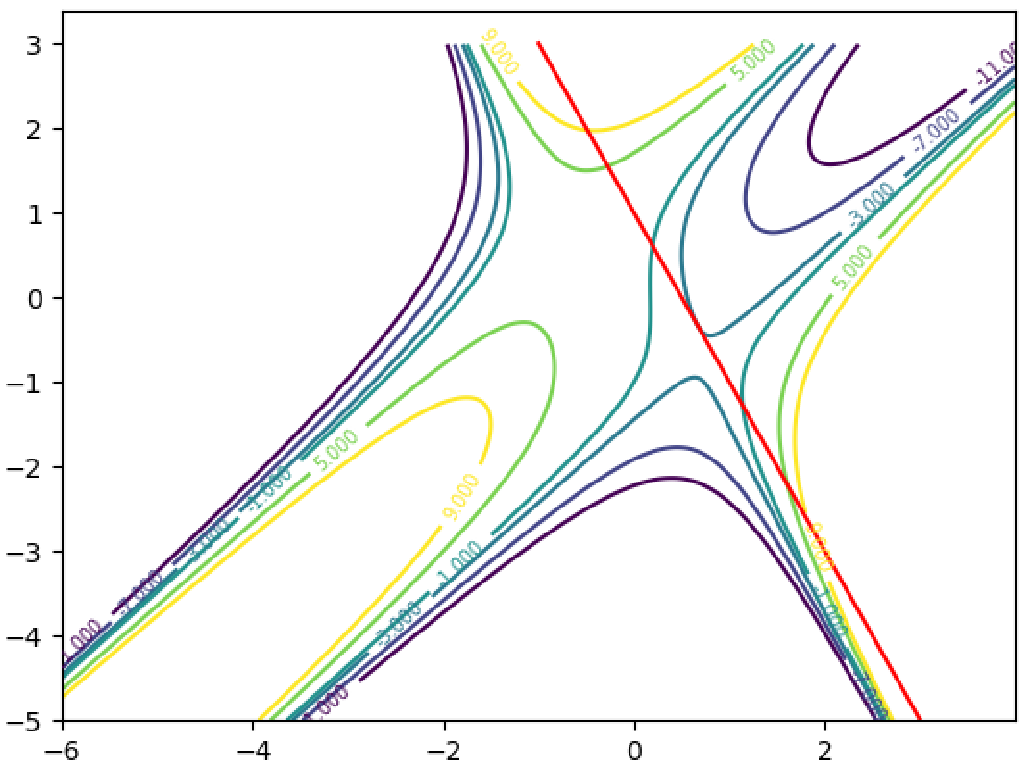
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.arange(-6,4,0.01)
Y = np.arange(-5,3,0.01)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)

def f(x,y):
    return 2*x**3-3*x**2*y-6*x+y**3
f=np.vectorize(f)
Z=f(X,Y)

cp=plt.contour(X,Y,Z,[-11,-7,-3,-1,5,9])
plt.clabel(cp,fontsize=7)

plt.plot([-1,3],[3,-5],'r')
plt.show()
```



On conjecture qu'il y a un point critique en $(2/3, -1/3)$.

2) La fonction $f : (x, y) \longmapsto 2x^3 - 3x^2y - 6x + y^3$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\nabla f(x, y) = (6x^2 - 6xy - 6, -3x^2 + 3y^2)$

On a $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 1\}$ avec $g : (x, y) \longmapsto 2x + y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\nabla g(x, y) = (2, 1)$

donc

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique sous } \mathscr{C} \quad &\iff \quad \begin{cases} (x,y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x,y) \in \operatorname{Vect}(\nabla g(x,y)) \end{cases} \\
&\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (x,y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases} \\
&\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x^2 - 6xy - 6 = 2\lambda \\ -3x^2 + 3y^2 = \lambda \end{cases} \\
&\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 6x^2 - 6xy - 6 = 2\lambda \\ -6x^2 + 3y^2 + 3xy + 4 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x^2 - 3xy - 3 = \lambda \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ -6x^2 + 3(1-2x)^2 + 3x(1-2x) + 3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3x^2 - 3xy - 3 = \lambda \\ -9x + 6 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} y = -1/3 \\ \lambda = -1 \\ x = 2/3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi f admet $(2/3, -1/3)$ pour unique point fixe sous la contrainte $\mathscr{C}$.

3) Soit $(x,y) \in \mathscr{C}$. On a $(a,b) = (x,y) - (2/3, -1/3) \in \mathscr{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y = 0\}$ et

$$
\begin{aligned}
f(x,y) - f(2/3,-1/3) &= f((2/3,-1/3) + (a,b)) - f(2/3,-1/3) \\
&= f(2/3 + a, -1/3 - 2a) - f(2/3,-1/3) \\
&= 2\left(\frac{2}{3} + a\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3} + a\right)^2\left(-\frac{1}{3} - 2a\right) - 6\left(\frac{2}{3} + a\right) + \left(-\frac{1}{3} - 2a\right)^3 \\
&\quad - \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right) - 6\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^3\right) \\
&= 9a^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi f admet un minimum global en $(2/3, -1/3)$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

Exercice 4. Soient $f : (x,y) \longmapsto x^3 + 2x^2y - 4y^3$ et $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 1\}$.

1) Représenter les lignes de niveaux de f et la droite $\mathscr{C}$. Conjecturer la présence de deux points critiques pour f sous la contrainte $\mathscr{C}$.
On pourra restreindre le tracé au carré $[-8\,;8]^2$ et on fera en sorte que les niveaux $4/27$ et 76 soient représentés.
2) Démontrer que f admet bien deux points critiques de f sous la contrainte $\mathscr{C}$
3) Montrer que, sous la contrainte $\mathscr{C}$, f admet un minimum local et un maximum local mais qu'il ne s'agit pas de d'extrema globaux.

Correction :

1) Les points $(-7,-8)$ et $(7,7)$ appartiennent à la contrainte. Il suffit de les relier.

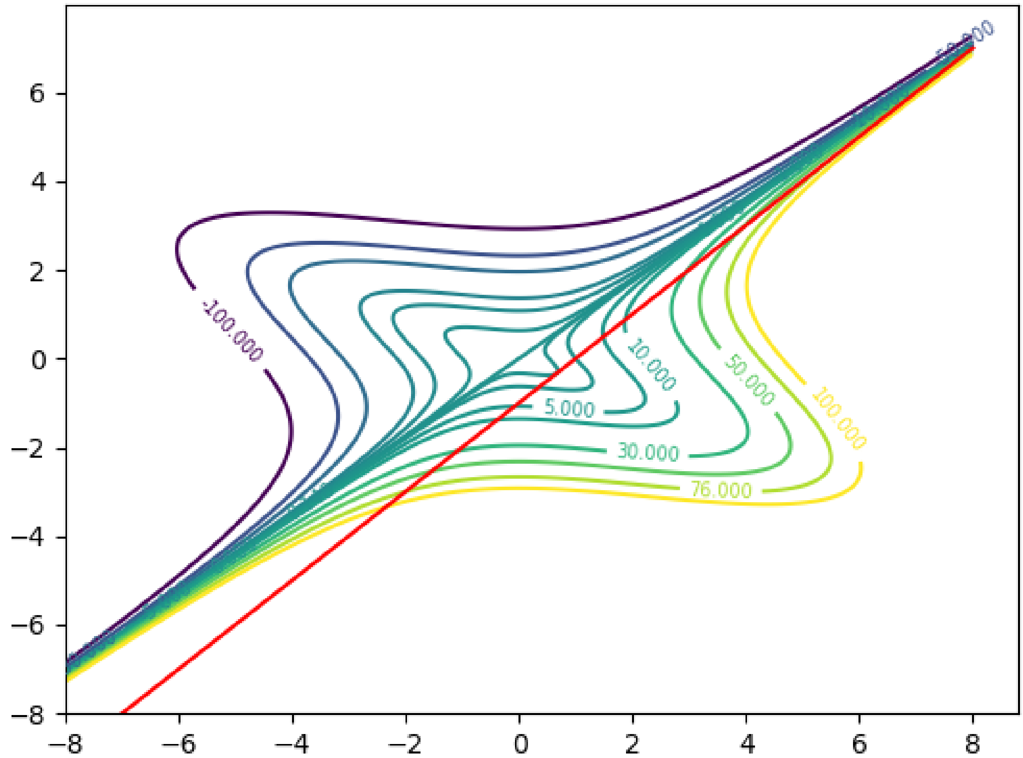
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.arange(-8,8,0.01)
Y = np.arange(-8,8,0.01)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)

def f(x,y):
    return x**3+2*x**2*y-4*y**3
f=np.vectorize(f)
Z=f(X,Y)

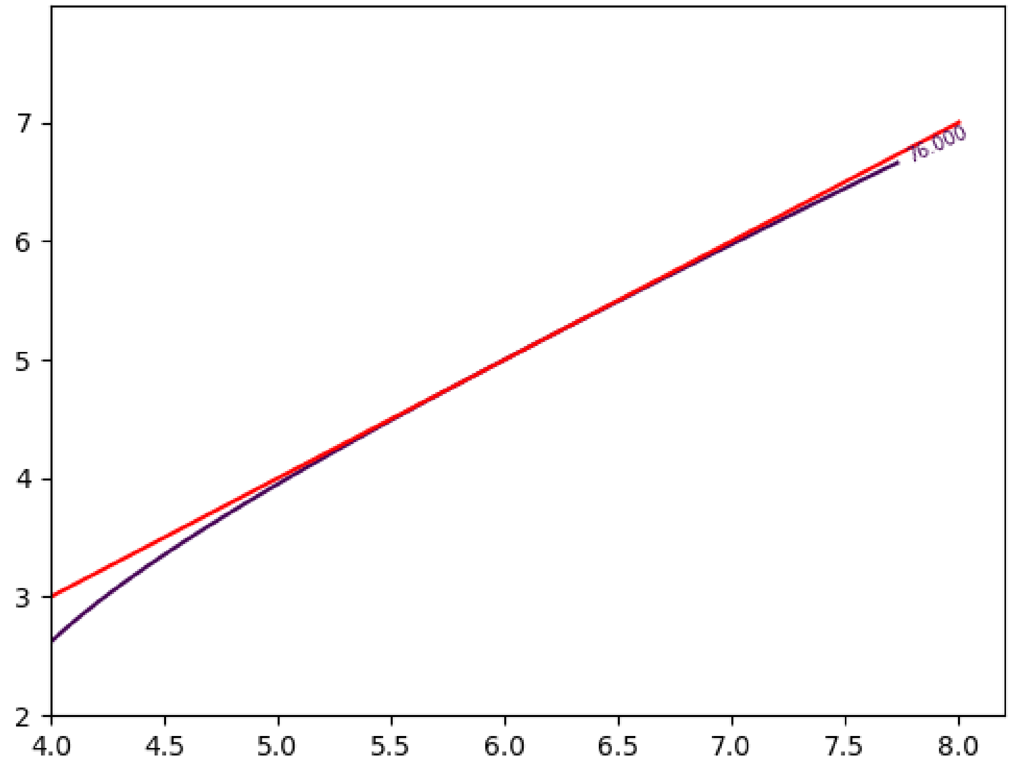
cp=plt.contour(X,Y,Z
    ,[-100,-50,-30,-10,-5,-1,0,4/27,1,5,10,30,50,76,100])
plt.clabel(cp,fontsize=7)

plt.plot([-7,8],[-8,7],'r')
plt.show()
```

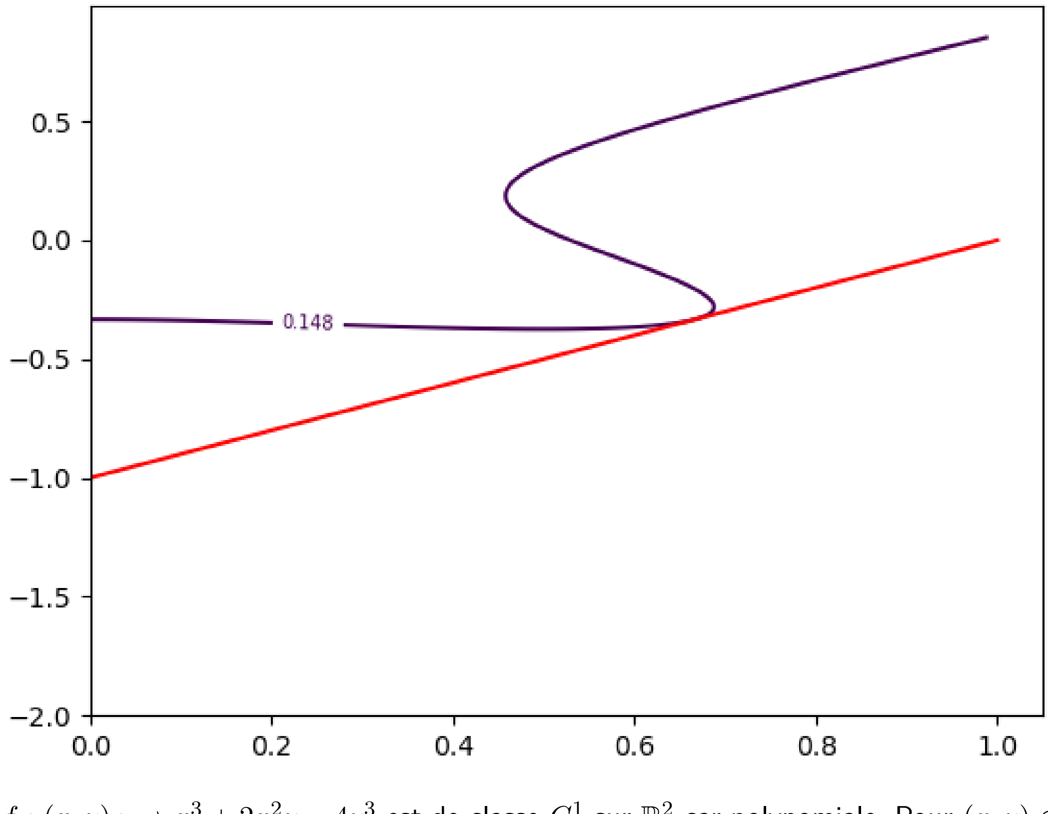


En effet, on dirait bien que la droite $y = 1 + x$ est tangente aux lignes de niveaux $4/27$ et 76 mais zoomons :

- ```
  X = np.arange(4,8,0.01)
  Y = np.arange(2,8,0.01)
  X,Y=np.meshgrid(X,Y)
  cp=plt.contour(X,Y,Z,[76])
  plt.clabel(cp,fontsize=7)
  plt.plot([4,8],[3,7],'r')
  plt.show()
  ```
  ```




- ```
  X = np.arange(0,1,0.01)
  Y = np.arange(-2,1,0.01)
  X,Y=np.meshgrid(X,Y)
  cp=plt.contour(X,Y,Z,[4/27])
  plt.clabel(cp,fontsize=7)
  plt.plot([0,1],[-1,0],'r')
  plt.show()
  ```



2) La fonction $f:(x,y)\longmapsto x^3+2x^2y-4y^3$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\nabla f(x,y)=(3x^2+4xy,2x^2-12y^2)$
  ```

On a $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) = 1\}$ avec $g : (x, y) \longmapsto x - y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\nabla g(x, y) = (1, -1)$ donc

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique sous } \mathscr{C} \quad & \iff \quad \begin{cases} (x,y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x,y) \in \mathrm{Vect}(\nabla g(x,y)) \end{cases} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} (x,y) \in \mathscr{C} \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{cases} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ 2x^2 - 12y^2 = -\lambda \end{cases} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + y \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ 5x^2 + 4xy - 12y^2 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + y \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ 5(1+y)^2 + 4(1+y)y - 12y^2 = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + y \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ 5 + 14y - 3y^2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Le trinôme $-3X^2 + 14X + 5$ admet pour discriminant $14^2 - 4 \times (-3) \times 5 = 4(49 + 15) = 4 \times 64 = 16^2$ donc admet deux racines $\dfrac{-14 - 16}{-6} = 5$ et $\dfrac{-14 + 16}{-6} = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique sous } \mathscr{C} \quad & \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 + y \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 + y \\ 3x^2 + 4xy = \lambda \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = 6 \\ \lambda = 228 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ 3x^2 + 4xy = \frac{4}{9} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi f admet deux points critiques sous la contrainte $\mathscr{C}$: $(6, 5)$ et $(2/3, -1/3)$.

3) • Soit $(x, y) \in \mathscr{C}$. On a $(a, b) = (x, y) - (6, 5) \in \mathscr{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$ et

$$
\begin{aligned}
f(x,y) - f(6,5) &= f((6,5) + (a,b)) - f(6,5) \\
&= f(6 + a, 5 + a) - f(6,5) \\
&= (6+a)^3 + 2(6+a)^2(5+a) - 4(5+a)^3 - 76 \\
&= 108a + 18a^2 + a^3 + 120a + 10a^2 + 72a + 24a^2 + 2a^3 - 300a - 60a^2 - 4a^3 \\
&= -8a^2 - a^3 = -a^2(8 + a) \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

lorsque $a \in]-8\,; +\infty[$. Ainsi f admet un maximum local (mais pas global) en $(6, 5)$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.

• Soit $(x, y) \in \mathscr{C}$. On a $(a, b) = (x, y) - (2/3, -1/3) \in \mathscr{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$ et

$$
\begin{aligned}
f(x,y) - f(2/3,-1/3) &= f((2/3,-1/3) + (a,b)) - f(2/3,-1/3) \\
&= f(2/3 + a, -1/3 + a) - f(2/3,-1/3) \\
&= (2/3+a)^3 + 2(2/3+a)^2(-1/3+a) - 4(-1/3+a)^3 - \frac{4}{27} \\
&= 4a/3 + 2a^2 + a^3 - 8a/9 - 2a^2/3 + 8a/9 + 8a^2/3 + 2a^3 - 4a/3 + 4a^2 - 4a^3 \\
&= 8a^2 - a^3 = a^2(8 - a) \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

lorsque $a \in]-\infty\,; 8[$. Ainsi f admet un minimum local (mais pas global) en $(2/3, -1/3)$ sous la contrainte $\mathscr{C}$.