Feuille de TP n° 3

Fonctions de deux variables (corrections)

Proposition. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$. Si le gradient $\nabla f(a) \neq 0$, alors :*

- *$\nabla f(a)$ est orthogonal à la tangente à la ligne de niveau $f(a)$ de f.*
- *$\nabla f(a)$ pointe vers les lignes de niveaux supérieurs (c'est-à-dire les lignes de niveau c pour tout $c > f(a)$).*

Esquisse de démonstration. Les outils du programme ne permettent pas de démontrer cela proprement et facilement. Pour faire une esquisse de démonstration :

- On note $a = (a_1, a_2)$, $\lambda = f(a)$ et $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x) = \lambda\}$ la ligne de niveau λ.
- Approximons f par son approximation affine locale (cf. formule de Taylor) : pour tout x dans un voisinage V de a, $f(x) \approx f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle$.
- Supposons que, sur ce voisinage V de a, la ligne de niveau λ est la courbe représentative d'une certaine fonction g dérivable. Cela signifie que :
  - il existe un intervalle ouvert contentant a_1 tel que la courbe de niveau est $\mathcal{L} \cap V = \{(t, g(t)) \,|\, t \in I\}$. En particulier $f(a_1) = a_2$.
  - Pour tout $t \in I$, $f(t, g(t)) = \lambda$.

Il s'ensuit que :

- La tangente en a à la ligne de niveau est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, g'(a_1))$. On a alors, pour tout h non nul assez petit,
$$\langle \nabla f(a), \overrightarrow{u} \rangle = \frac{1}{h} \langle \nabla f(a), h\overrightarrow{u} \rangle \approx \frac{f(a + h\overrightarrow{u}) - f(a)}{h}.$$
On $a + h\overrightarrow{u} = (a_1 + h, a_2 + hg'(a_1)) = (a_1 + h, g(a_1) + hg'(a_1)) \approx (a_1 + h, g(a_1 + h))$ puisque $g(a_1 + h) \approx g(a_1) + hg'(a_1)$. Lorsque h est tel que $a_1 + h \in I$, on obtient
$$\langle \nabla f(a), \overrightarrow{u} \rangle \approx \frac{f(a_1 + h, g(a_1 + h)) - f(a)}{h} = \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0.$$
Ainsi $\nabla f(a)$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. Cela signifie que $\nabla f(a)$ est orthogonal à $\mathcal{L}$.
- La formule Cauchy-Schwarz entraîne que, si x est au voisinage de a,
$$f(x) - f(a) \approx \langle \nabla f(a), x - a \rangle \leqslant \|\nabla f(a)\| \, \|x - a\|,$$
avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (et même $\lambda \in \mathbb{R}_+$ pour que $\nabla f(a), x - a \rangle \geqslant 0$) tel que $\nabla f(a) = \lambda(x - a)$. Ainsi $f(x) - f(a)$ est maximal lorsque $x - a$ est dans la direction de $\nabla f(a)$. □

Exercice 1. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xye^{-(x^2+y^2)}$. Il s'agit de la fonction de l'exemple ci-dessus.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer ses points critiques.
2) Montrer que $(0, 0)$ est un point selle.
3) a) Étudier les extrema de la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto te^{-t}$.
   b) Justifier que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.
   c) En déduire que f admet des extrema globaux en les quatre autres points critiques.

Correction :

1) La fonction exp est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ est $(x,y) \longmapsto -(x^2+y^2)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale donc $(x,y) \longmapsto e^{-(x^2+y^2)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Enfin $(x,y) \longmapsto xy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \left(ye^{-(x^2+y^2)} + xy(-2x)e^{-(x^2+y^2)}, xe^{-(x^2+y^2)} + xy(-2y)e^{-(x^2+y^2)}\right)\\ &= \left(y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}, x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}\right).\end{aligned}$$

   Ainsi (x,y) est critique si et seulement si $(y(1-x^2), x(1-y^2)) = (0,0)$. On trouve donc cinq points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

2) Si $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x,x) - f(0,0) = x^2e^{-2x^2} > 0$ et $f(x,-x) - f(0,0) = -x^2e^{-2x^2} < 0$. Ainsi f n'est ni un maximum local, ni un minimum local. C'est un point selle.

3) a) La fonction $\varphi : t \longmapsto te^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$. Ainsi elle est croissante sur $]-\infty\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty]$. Par croissances comparées, $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\varphi(0) = 0$. Ainsi φ est maximale en 1.

   b) Ultra classique : si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{x^2+y^2}{2} - xy = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$. D'où l'inégalité.

   c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(x,y) \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}e^{-(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}\varphi\left(x^2+y^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(1) = \frac{1}{2e}.$$

   On a $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-1} = \dfrac{1}{2e}$. On a de même $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2e}$ donc f admet un maximum global en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   On a $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. On a (de façon analogue), pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $-\dfrac{x^2+y^2}{2} \leqslant xy$ donc $-\dfrac{1}{2e} \leqslant f(x,y)$. Ainsi f admet un maximum global en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 2. (★) à (★★★)

1) Pour les fonctions suivantes, représenter la surface, des lignes de niveaux et un champ de gradient puis conjecturer la présence de points critiques et leur nature (point selle, point en lequel il y a un maximum/minimum local/global) :
   a) $(x,y) \longmapsto x^3 + xy + y^3$,
   b) $(x,y) \longmapsto \sin(x) + y^2 - 2y + 1$,
   c) $(x,y) \longmapsto xy - x^2y - xy^2$,
   d) $(x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$,
   e) $(x,y) \longmapsto \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$,
   f) $(x,y) \longmapsto e^x(x + y^2 + e^x)$.
2) Démontrer ensuite ces conjectures.
   Pour la question 1f, on montrera au préalable que $\varphi : t \longmapsto 1 + t + 2e^t$ s'annule en un unique point α et que $\alpha \in [-2\,;-1]$.

Correction :

1) Commençons par les importations :

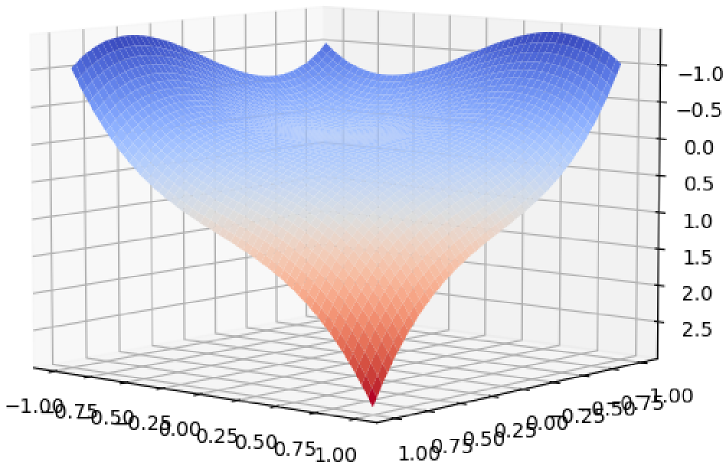
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
ax = Axes3D(plt.figure())
from matplotlib.cm import coolwarm
```

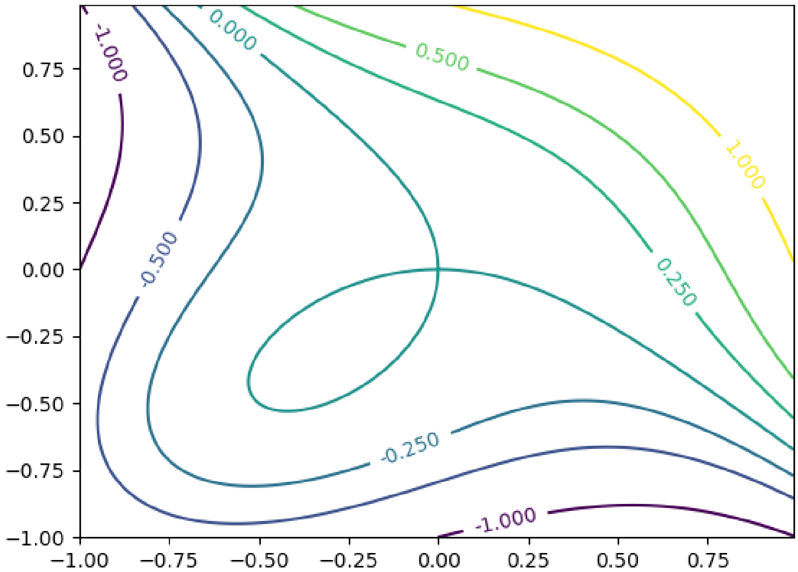
Dans chaque exemple, nous allons d'abord implémenter $a, b, c, d, h_1, h_2, f, \nabla f$ (pour tracer sur $[a\,;b] \times [c\,;d]$ avec une grille dont le pas est h_1 pour la surface et les lignes de niveau et h_2 pour le champ de gradient) dans les variables `a,b,h1,h2,f,gradf` et créer la liste `L` des niveaux voulus. Nous allons ensuite tracer les représentations graphiques de la surface, des lignes de niveau et du champ de gradient (avec des vecteurs unitaires) avec les commandes ci-dessous :

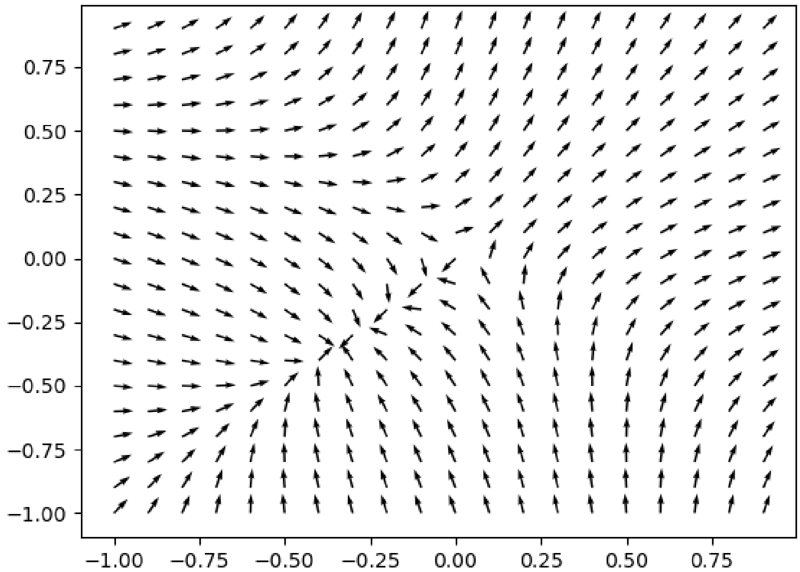
```
#On crée une grille rectangulaire.
X = np.arange(a,b,h1)
Y = np.arange(c,d,h1)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)

#On crée le tableau des images de X,Y par f.
f=np.vectorize(f)#On vectorise la fonction f si nécessaire.
Z=f(X,Y)

#On trace la surface
ax.plot_surface(X,Y,Z,cmap=coolwarm)
plt.show()

#On trace les lignes de niveau.
cp=plt.contour(X,Y,Z,L)
plt.clabel(cp,inline=True,fontsize=10)
plt.show()

#On trace le champ de gradient.
X = np.arange(a,b,h2)
Y = np.arange(c,d,h2)
X,Y=np.meshgrid(X,Y)
Z=f(X,Y)
gradf=np.vectorize(gradf)
dx,dy=gradf(X,Y)
plt.quiver(X,Y,dx,dy)
plt.show()
```

a)

```
a=-1
b=1
c=-1
d=1
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return x**3+x*y+y**3

def gradf(x,y):
    dx=3*x**2+y
    dy=x+3*y**2
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-1,-0.5,-0.25,0]
```







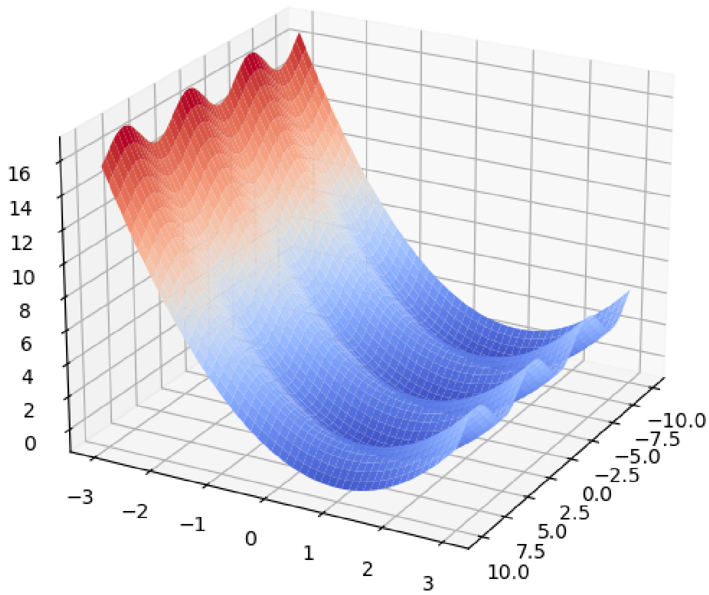
On conjecture qu'il y a deux points critiques :

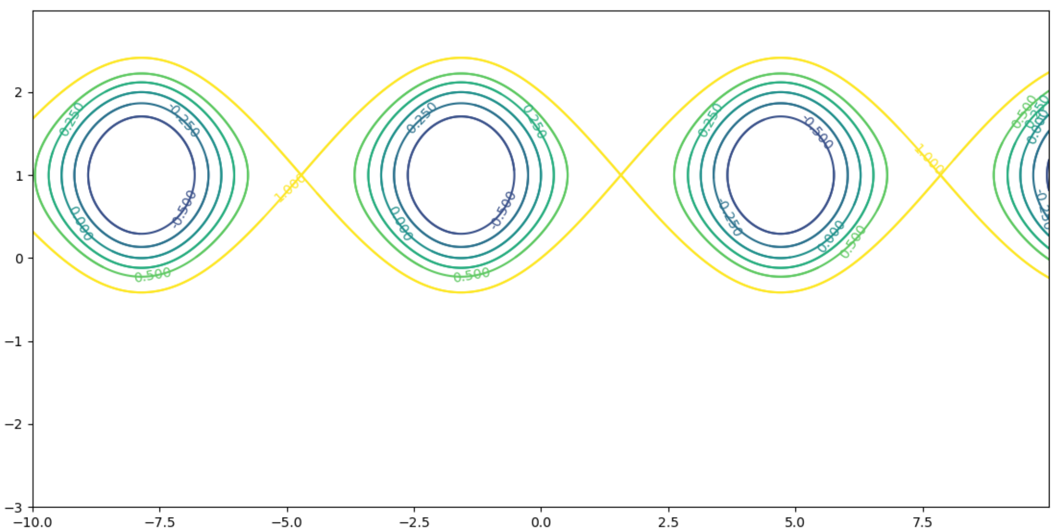
- en $(0,0)$ qui semble être un point selle,
- en $(-1/3,-1/3)$ où f semble admettre un maximum local.

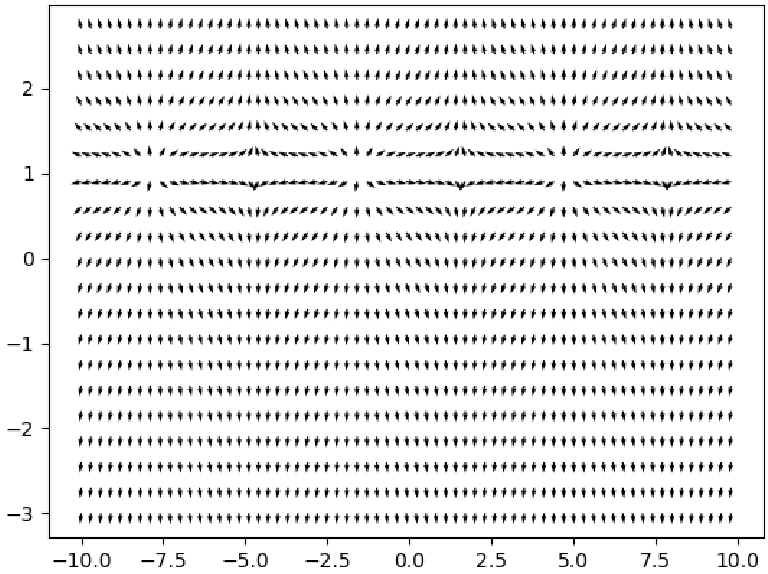
b)

```
a=-10
b=10
c=-3
d=3
```

```
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return np.sin(x)+y**2-2*y+1

def gradf(x,y):
    dx=np.cos(x)
    dy=2*y-2
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,1]
```





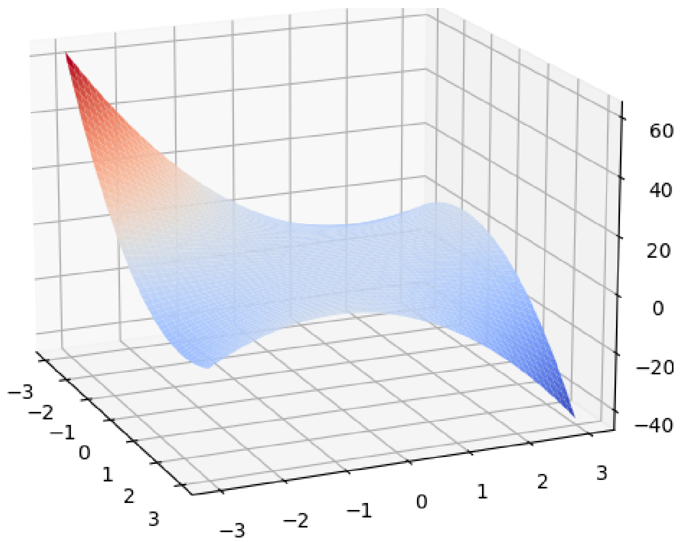


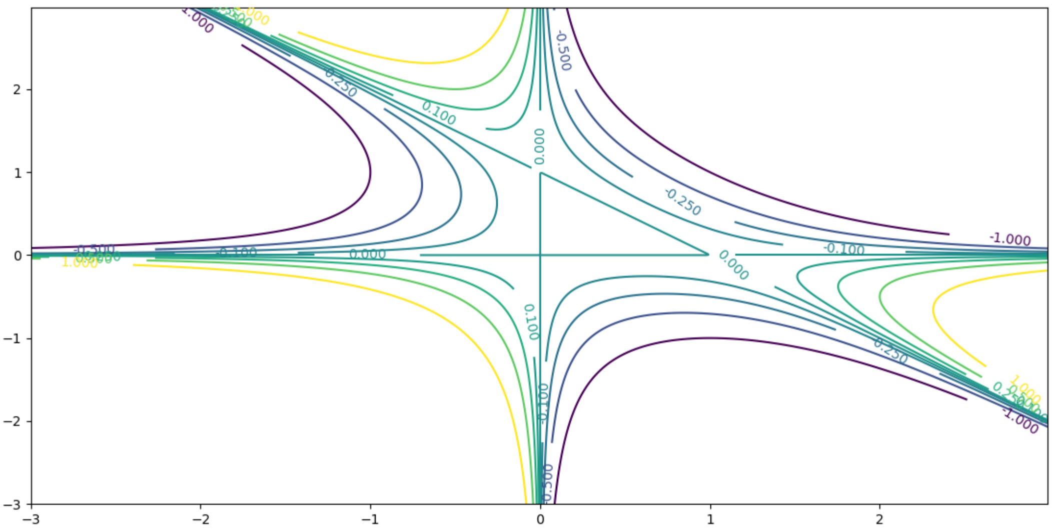
On conjecture qu'il y a une infinité de points critiques :

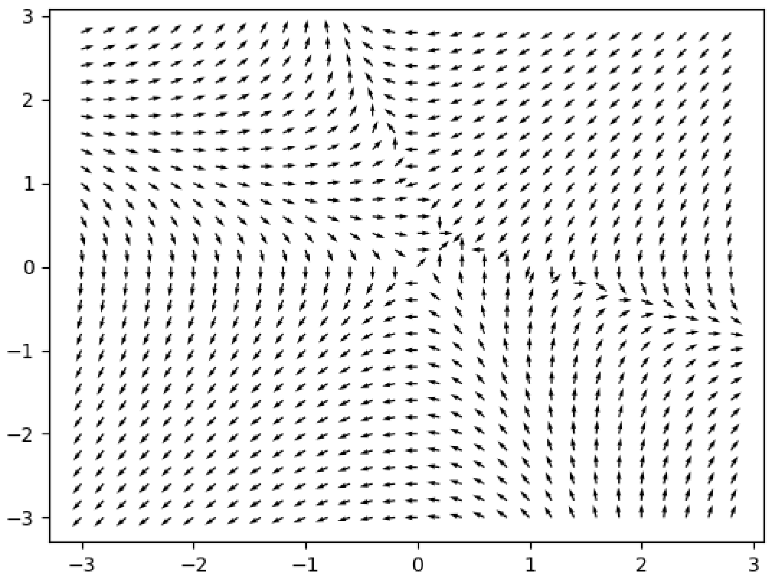
- en tous les $(\frac{\pi}{2}+k\pi,1)$ qui semblent être des points selles,
- en tous les $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,1)$ où f semble admettre un minimum local.

c)

```
a=-3
b=3
c=-3
d=3
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return x*y-x**2*y-x*y**2

def gradf(x,y):
    dx=y-2*x*y-y**2
    dy=x-x**2-2*x*y
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-1,-0.5,-0.25,-0.1,0,0.1,0.25,0.5,1]
```





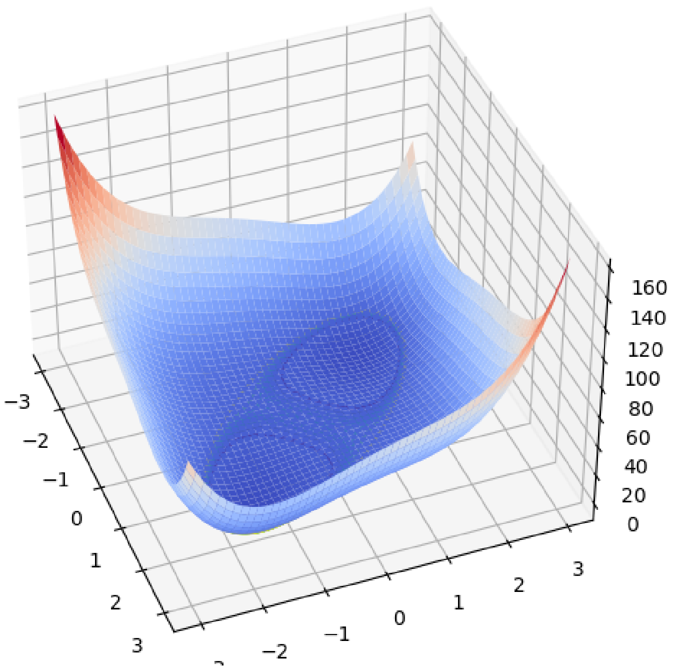


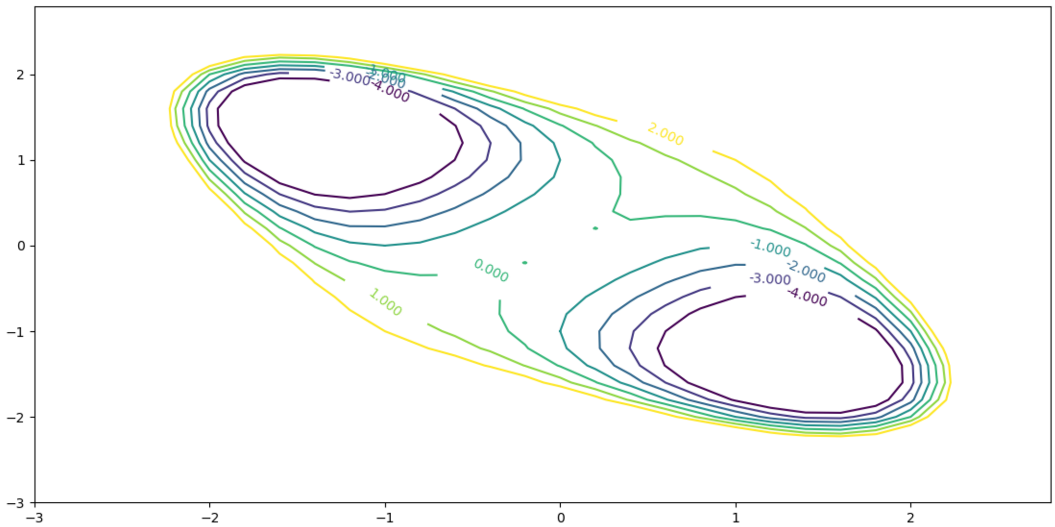
On conjecture qu'il y a quatre points critiques :

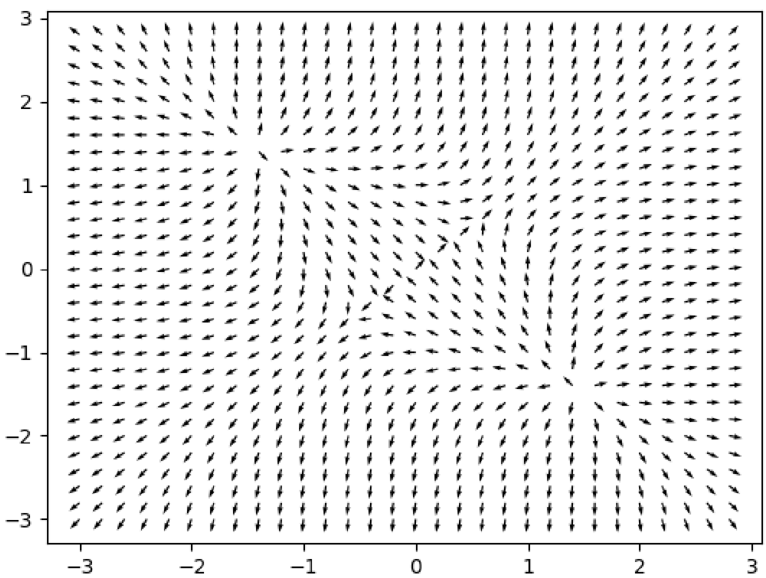
- en $(0, 0)$ qui semble être un point selle,
- en $(0, 1)$ qui semble être un point selle,
- en $(1, 0)$ qui semble être un point selle,
- en $(1/3, 1/3)$ où f semble admettre un maximum local.

d)

```
a=-3
b=3
c=-3
d=3
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return x**4+y**4-2*(x-y)**2

def gradf(x,y):
    dx=4*x**3-4*(x-y)
    dy=4*y**3-4*(y-x)
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-4,-3,-2,-1,0,1,2]
```







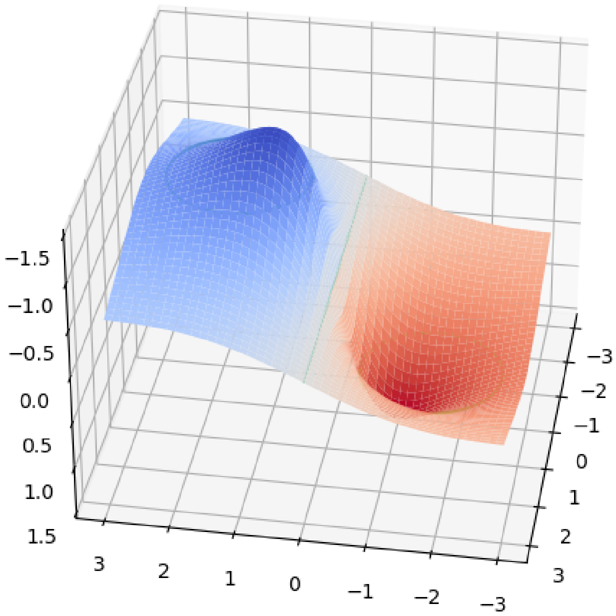
On conjecture qu'il y a trois points critiques :

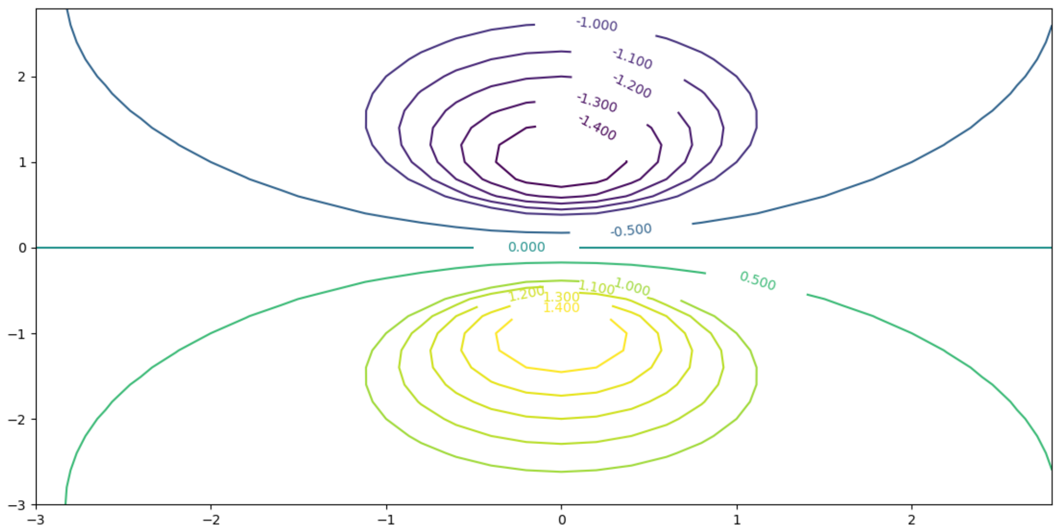
- en $(0,0)$ qui semble être un point selle,
- en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ où f semble admettre un minimum local.

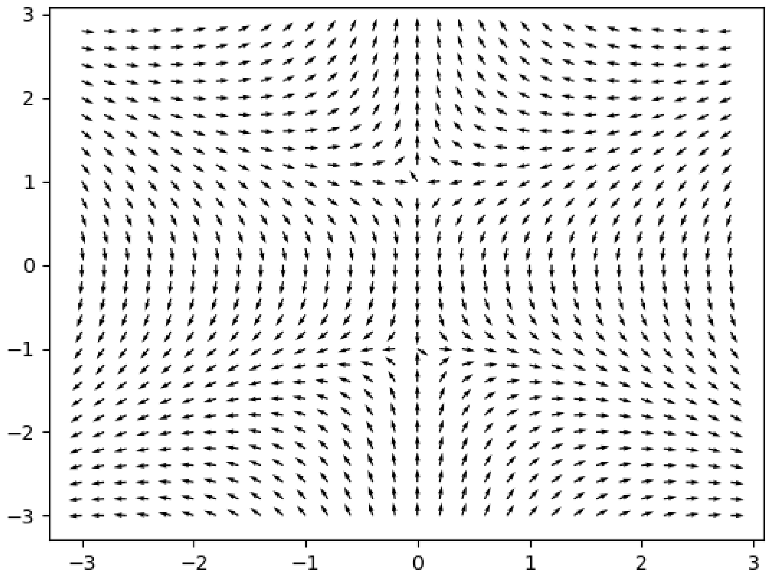
- en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ où f semble admettre un minimum local.

e)

```
a=-3
b=3
c=-3
d=3
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return -3*y/(x**2+y**2+1)

def gradf(x,y):
    dx=-6*x*y/(x**2+y**2+1)**2
    dy=-3*(x**2-y**2+1)/(x**2+y**2+1)**2
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-1.4,-1.3,-1.2,-1.1,-1,-0.5,0,0.5,1,1.1,1.2,1.3,1.4]
```





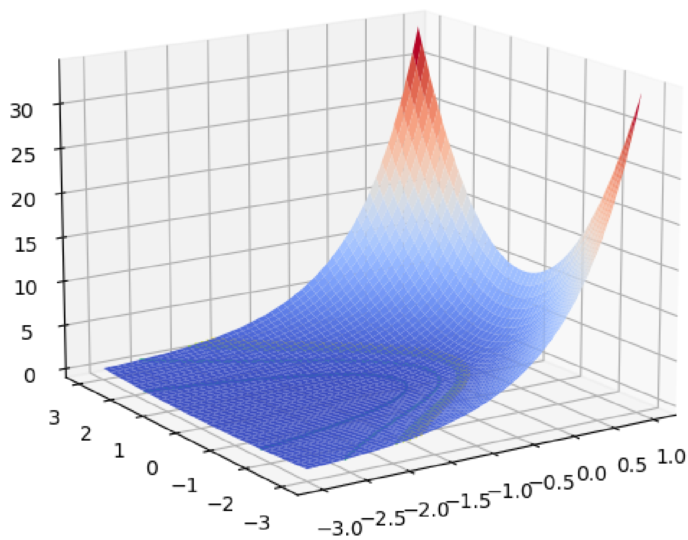


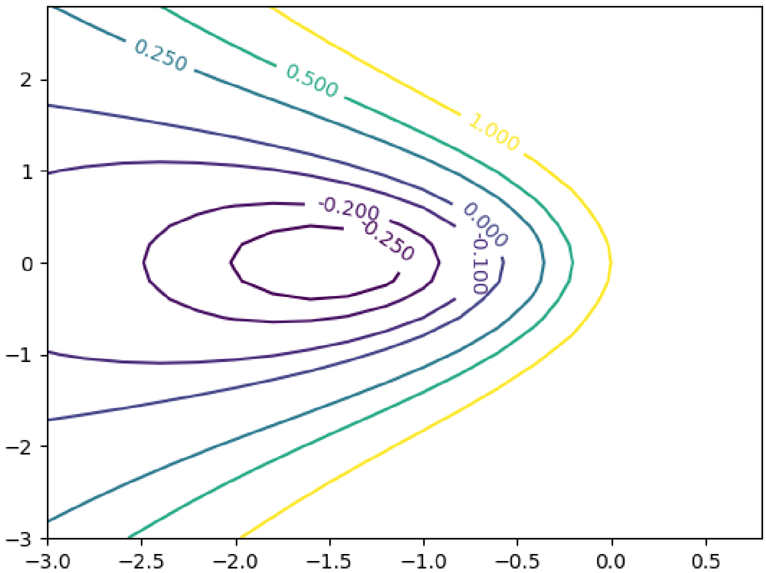
On conjecture qu'il y a deux points critiques :

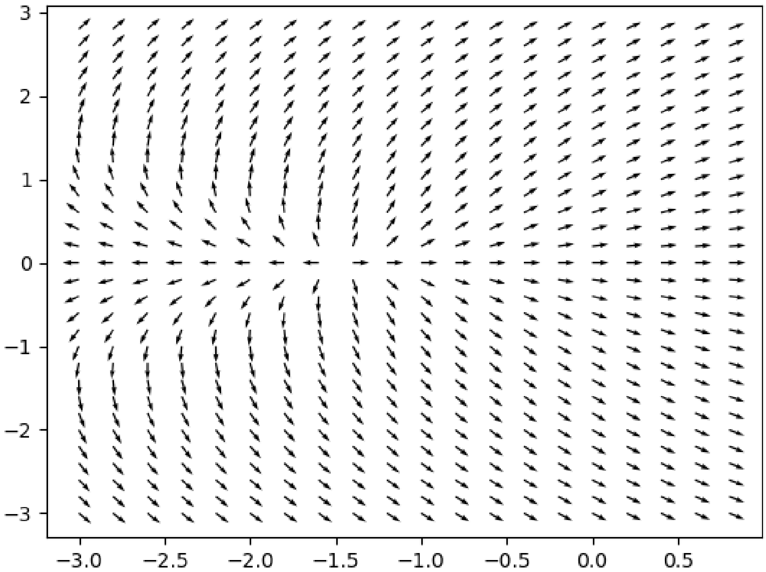
- en $(0,1)$ où f semble admettre un maximum local.
- en $(0,-1)$ où f semble admettre un minimum local.

f)

```
a=-3
b=1
c=-3
d=3
h1=0.01
h2=0.2

def f(x,y):
    return np.exp(x)*(x+y**2+np.exp(x))

def gradf(x,y):
    dx=np.exp(x)*(1+x+y**2+2*np.exp(x))
    dy=2*y*np.exp(x)
    N=(dx**2+dy**2)**(1/2)
    return dx/N,dy/N

L=[-0.25,-0.2,-0.1,0,0.25,0.5,1]
```







On conjecture qu'il y a un seul point critique en un point de la forme $(x_0, 0)$ en lequel f admet un minimum local.

2) a) La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 + xy + y^3$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x, y) = \big(3x^2 + y, x + 3y^2\big)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = -3x^2 \\ 3(-3x^2)^2 + x = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = -3x^2 \\ x(27x^3 + 1) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (3x)^3 = -1 \\ y = -3x^2 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a donc deux points critiques $(0, 0)$ et $(-1/3, -1/3)$.

- Montrons que $(0, 0)$ est un point selle :
  — Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x, x) - f(0, 0) = 2x^3 + x^2 = x^2(2x + 1)$. Donc, si $x \in \left]-1/2\,;0\right[$, alors $f(x, x) > f(0, 0)$.
  — Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x, -x) - f(0, 0) = -x^2$. Donc, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x, x) < f(0, 0)$.

- Montrons que f admet un maximum local en $(-1/3,-1/3)$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
f\left(x-\frac{1}{3},y-\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) &= \left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\left(y-\frac{1}{3}\right)^3\\
&= x^3+3x^2\left(-\frac{1}{3}\right)+3x\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+xy-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}+\frac{1}{9}\\
&\quad +y^3+3y^2\left(-\frac{1}{3}\right)+3y\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{9}-\left(-\frac{1}{3}\right)^3\\
&= x^3-x^2+\frac{x}{3}+xy-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}+y^3-y^2+\frac{y}{3}\\
&= x^3-x^2+xy+y^3-y^2.
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité ultra classique : $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$:

$$f\left(x-\frac{1}{3},y-\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\leqslant x^3-x^2+\frac{x^2+y^2}{2}+y^3-y^2=x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)+y^2\left(y-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0,$$

lorsque $x\leqslant\dfrac{1}{2}$ et $y\leqslant\dfrac{1}{2}$. Ainsi f admet un maximum local en $(-1/3,-1/3)$.

b) La fonction $(x,y)\longmapsto y^2-2y+1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. La fonction $(x,y)\longmapsto x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $\sin$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f:(x,y)\longmapsto\sin(x)+y^2-2y+1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y)=(\cos(x),2y-2)$. On a

$$(x,y)\text{ est critique}\iff\left\{\begin{array}{l}\cos(x)=0\\2y-2=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]\\y=1\end{array}\right.$$

Il y a une infinité de points critiques : tous les $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Puisque f est 2π périodique en la première variable, il suffit d'étudier la nature de $\left(-\dfrac{\pi}{2},1\right)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.

- Montrons que $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ est un point selle.
  - Si $x\in\mathbb{R}$, $f(x,1)-f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)=\sin(x)-1$. Si x est au voisinage de $\pi/2$ mais différent de $\pi/2$, $f(x,1)<f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.
  - Si $y\in\mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2},y\right)-f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)=1+y^2-2y+1-1=(y-1)^2$. Si $y\neq1$, $f\left(\dfrac{\pi}{2},y\right)<f\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$.
- La fonction f admet un minimum global en $\left(-\dfrac{\pi}{2},1\right)$ car, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)-f\left(-\frac{\pi}{2},1\right)=\sin(x)+y^2-2y+1-(-1)=\sin(x)+1+(y-1)^2\geqslant0.$$

c) La fonction $(x,y)\longmapsto xy-x^2y-xy^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y)=\big(y-2xy-y^2,x-x^2-2xy\big)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y)\text{ est critique}&\iff\left\{\,y-2xy-y^2=0x-x^2-2xy=0\right.\\
&\iff\left\{\,y(1-2x-y)=0x(1-x-2y)=0\right.\\
&\iff\left\{\,y=0x(1-x-2y)=0\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\,1-2x-y=0x(1-x-2y)=0\right.\\
&\iff\left\{\begin{array}{l}y=0\\x(1-x)=0\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=1-2x\\x(1-x-2(1-2x))=0\end{array}\right.\\
&\iff\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=1-2x\\x(-1+3x))=0\end{array}\right.\\
&\iff\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=0\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=0\\x=1\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=1\\x=0\end{array}\right.\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{array}{l}y=1/3\\x=1/3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Il y a donc quatre points critiques $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1/3,1/3)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x,x) - f(0,0) = x^2 - 2x^3 = x^2(1-2x) > 0$ lorsque $x \in]0\,;1/2[$.
  On a $f(x,-x) = -x^2 < 0$ lorsque $x \neq 0$. Ainsi $(0,0)$ est un point selle.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(x,y+1) - f(0,1) = x(y+1) - x^2(y+1) - x(y+1)^2$.
  Si on prend $y = 0$, on a $f(x,1) - f(0,1) = -x^2 < 0$ lorsque $x \neq 0$.
  Si on prend $y = -x$, on a $f(x,-x+1) - f(0,1) = x(-x+1) + x^2 - x^3 - x(x^2-2x+1) = 2x^2(1-x) > 0$ lors que $x \in]0\,;1[$.
  Ainsi $(0,1)$ est un point selle.
- De même $f(1,y) - f(1,0) = -y^2 < 0$ si $y \neq 0$ et $f(1-y,y) - f(1,0) = 2y^2(1-y) > 0$ si $y \in]0\,;1[$.
  Ainsi $(1,0)$ est un point selle.
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$.

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{3},y+\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) &= \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right) - \left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(y+\frac{1}{3}\right) - \left(x+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{27} \\
&= xy + \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{1}{9} - x^2y - \frac{x^2}{3} - \frac{2xy}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{y}{9} - \frac{1}{27} \\
&\qquad - y^2x - \frac{y^2}{3} - \frac{2xy}{3} - \frac{2y}{9} - \frac{x}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} \\
&= -x^2y - \frac{x^2}{3} - \frac{xy}{3} - y^2x - \frac{y^2}{3} \\
&= -\frac{1}{3}\left(3x^2y + 3y^2x + x^2 + xy + y^2\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(3x^2y + 3y^2x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(x+y)^2\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(x^2\left(\frac{1}{2}+3y\right) + y^2\left(\frac{1}{2}+3x\right) + \frac{1}{2}(x+y)^2\right) \leqslant 0,
\end{aligned}$$

  pour tout (x,y) au voisinage de $(0,0)$ (lorsque $y > \frac{-1}{6}$ et $x > \frac{-1}{6}$). Ainsi f admet un maximum local en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

d) La fonction $f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x\right)$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique} \quad &\iff \quad \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 - 4y + 4x = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 = -x^3 = (-x)^3 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y = -x \quad (\text{car } t \mapsto t^3 \text{ est bijective sur } \mathbb{R}) \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ y = -x \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = -x \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a donc trois points critiques $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

- On a $f(x,0) - f(0,0) = x^4 - 3x^2 = x^2(x^2-3) < 0$ pour tout x non nul au voisinage de 0. On a $f(x,x) - f(0,0) = 2x^4 > 0$ pour tout x non nul au voisinage de 0. Ainsi $(0,0)$ est un point selle.

- On a $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4+4-2(2\sqrt{2})^2 = 4+4-2\times 8 = -8$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
&f(x-\sqrt{2},y+\sqrt{2}) - f(\sqrt{2},-\sqrt{2})\\
&= (x-\sqrt{2})^4 + (y+\sqrt{2})^4 - 2(x-y-2\sqrt{2})^2 + 8\\
&= x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 12x^2 - 8x\sqrt{2} + 4 + y^4 + 4y^3\sqrt{2} + 12y^2 + 8y\sqrt{2} + 4\\
&\quad - 2(x^2+y^2+8-2xy-4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y) + 8\\
&= x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 12x^2 - 8x\sqrt{2} + 4 + y^4 + 4y^3\sqrt{2} + 12y^2 + 8y\sqrt{2} + 4\\
&\quad - 2(x^2+y^2+8-2xy-4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y) + 8\\
&= x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 10x^2 + y^4 + 4y^3\sqrt{2} + 10y^2 + 4xy\\
&= x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 10x^2 + y^4 + 4y^3\sqrt{2} + 10y^2 + 4\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)\\
&\geqslant x^4 - 4x^3\sqrt{2} + 8x^2 + y^4 + 4y^3\sqrt{2} + 8y^2\\
&= x^4(x^2-4\sqrt{2}x+8) + y^4(y^2+4\sqrt{2}y+8)\\
&= x^4(x-2\sqrt{2})^2 + y^4(y+2\sqrt{2})^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f admet un minimum global en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. On montre de même que f admet un minimum global en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

e) La fonction $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{-3y}{x^2+y^2+1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car quotient de deux fonctions polynomiales avec celle au dénominateur qui ne s'annule pas. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{(-3y)(2x)}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{(-3)(x^2+y^2+1)-(-3y)(2y)}{(x^2+y^2+1)^2}\right) = \left(\frac{-6xy}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{3(y^2-x^2-1)}{(x^2+y^2+1)^2}\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est critique} &\iff \begin{cases} -6xy = 0\\ 3(y^2-x^2-1)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} xy = 0\\ y^2 = x^2+1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = 0\\ y^2 = x^2+1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0\\ y^2 = x^2+1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = 0\\ y^2 = 1\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0\\ 0 = x^2+1\end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a donc deux points critiques $(0,1)$ et $(0,-1)$.

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(x,y-1)-f(0,-1) = \frac{-3(y-1)}{x^2+y^2-2y+2} - \frac{3}{2} &= -\frac{3}{2}\times\frac{2(y-1)+x^2+y^2-2y+2}{x^2+y^2-2y+2}\\
&= -\frac{3}{2}\times\frac{x^2+y^2}{x^2+(y-1)^2+1} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f admet un maximum global en $(0,-1)$.

- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
f(x,y+1)-f(0,1) = \frac{-3(y+1)}{x^2+y^2+2y+2} + \frac{3}{2} &= \frac{3}{2}\times\frac{-2(y+1)+x^2+y^2+2y+2}{x^2+y^2+2y+2}\\
&= \frac{3}{2}\times\frac{x^2+y^2}{x^2+(y+1)^2+1} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Ainsi f admet un minimum global en $(0,1)$.

f) La fonction $\varphi : t \longmapsto 1 + t + 2e^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\varphi' : t \longmapsto 1 + 2e^t$ donc φ' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R}) = \left]\lim_{-\infty} \varphi \,;\, \lim_{+\infty} \varphi\right[=]-\infty\,;+\infty[$. Ainsi elle s'annule en un unique point α. On a $\varphi(-2) = 1 - 2 + 2e^{-2} = 2e^{-2} - 1 < 0$ et $\varphi(-1) = 2e^{-1} > 0$ donc $\alpha \in [-2\,;-1]$.

La fonction $(x, y) \longmapsto x + y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. La fonction $\exp$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la fonction $(x, y) \longmapsto x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc $(x, y) \longmapsto e^x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi $f : (x, y) \longmapsto e^x(x + y^2 + e^x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = \big(e^x(x + y^2 + e^x) + e^x(1 + e^x), 2ye^x\big) = \big(e^x(x + y^2 + 2e^x + 1), 2ye^x\big)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ est critique} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} e^x(x + y^2 + 2e^x + 1) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y^2 + 2e^x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi f admet $(\alpha, 0)$ pour unique point critique. Ensuite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x) \geqslant e^x(x + e^x) = g(x).$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x(x + e^x) + e^x(1 + e^x) = e^x\varphi(x)$. Ainsi g' est positive sur $[\alpha\,;+\infty[$ et négative sur $]-\infty\,;\alpha]$. Donc g est croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$. Ainsi g est minimale en α. On en déduit que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \geqslant g(x) = g(\alpha) = f(\alpha, 0).$$

Ainsi f admet un minimum en $(\alpha, 0)$.