Correction de quelques exercices de la feuille de TD 9

Exercice 1. Soit $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;A;B;C;D;E;F\}$ l'ensemble des chiffres du système hexadécimal. Considérons les trois parties : $X = \{A;B;E;F\}$, $Y = \{0;2;4;6;8;A;C;E\}$ et $Z = \{3;5;7;9\}$. Donner en extension les parties suivantes :

$$\overline{X} \quad \overline{Y}, \quad \overline{Z}, \quad X\cap Y, \quad Y\cup\overline{X}, \quad X\backslash Z, \quad \left(\overline{(\overline{Y}\cap X)\cup Z}\right)\backslash Y.$$

Correction : On obtient

$$\overline{X} = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;C;D\}, \qquad \overline{Y} = \{1;3;5;7;9;B;D;F\},$$

$$\overline{Z} = \{0;1;2;4;6;8;1;B;C;D;E;F\}, \qquad X\cap Y = \{A;E\},$$

$$Y\cup\overline{X} = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;B;C;D;F\}, \qquad X\backslash Z = X\cap\overline{Z} = \{0;1;2;4;6;8;C;D\}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\overline{(\overline{Y}\cap X)\cup Z}\right)\backslash Y = \left(\overline{(\overline{Y}\cap X)\cup Z}\right)\cap\overline{Y} = \overline{\overline{Y}\cap X}\cap\overline{Z}\cap\overline{Y} &= (Y\cup\overline{X})\cap\overline{Z}\cap\overline{Y}\\ &= \left(Y\cap\overline{Z}\cap\overline{Y}\right)\cup\left(\overline{X}\cap\overline{Z}\cap\overline{Y}\right)\\ &= \varnothing\cup\overline{X\cup Y\cup Z}\\ &= \overline{X\cup Y\cup Z} = \{1;D\}.\end{aligned}$$

Exercice 2. Donner en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ quand E est l'un des ensembles suivants

$$\mathcal{P}(\varnothing), \qquad \{a;\{b\}\}, \qquad \{\diamondsuit;\heartsuit\}, \qquad \{0;\{0\};\{\{0\}\}\}, \qquad \{\Lambda;0;*\}, \qquad \{A;C;G;T\}$$

Correction :

- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \Big\{\varnothing;\{\varnothing\}\Big\}$,
- $\mathcal{P}(\{a;\{b\}\}) = \Big\{\varnothing;\{a\};\{\{b\}\};\{a;\{b\}\}\Big\}$,
- $\mathcal{P}(\{\diamondsuit;\heartsuit\}) = \Big\{\varnothing;\{\diamondsuit\};\{\heartsuit\};\{\diamondsuit;\heartsuit\}\Big\}$,
- $\mathcal{P}(\{0;\{0\};\{\{0\}\}\}) = \Big\{\varnothing;\{0\};\{\{0\}\};\{\{\{0\}\}\};\{0;\{0\}\};\{0;\{\{0\}\}\};\{\{0\};\{\{0\}\}\};\{0;\{0\};\{\{0\}\}\}\Big\}$,
- $\mathcal{P}(\{\Lambda;0;*\}) = \Big\{\varnothing;\{\Lambda\};\{0\};\{*\};\{\Lambda;0\};\{\Lambda;*\};\{0;*\};\{\Lambda;0;*\}\Big\}$,
- $\mathcal{P}(\{A;C;G;T\}) = \Big\{\varnothing;\{A\};\{C\};\{G\};\{T\};\{A;C\};\{A;G\};\{A;T\};\{C;G\},$ $\{C,T\};\{G;T\};\{A;C;G\};\{A;C;T\};\{A;G;T\};\{C;G;T\};\{A;C;G;T\}\Big\}$.

Exercice 5. Soit E un ensemble. Montrer que, pour toutes parties A, B et D non vides de E, on a :

1) $(A\cup B = B\cap D) \;\Rightarrow\; (A\subset B\subset D)$.
2) $(\overline{A}\subset B) \;\Leftrightarrow\; (A\cup B = E)$.
3) $\left.\begin{array}{l}A\cup B = A\cup D\\ A\cap B = A\cap D\end{array}\right\} \;\Leftrightarrow\; B = D$.
4) $(A\cup B\cup D)\cap(A\cup B\cup\overline{D})\cap(A\cup D\cup\overline{B}) = A\cup(B\cap D)$.
5) $A\backslash B = \overline{B}\backslash\overline{A}$.
6) $A\backslash(B\cap D) = (A\backslash B)\cup(A\backslash D)$.
7) $\left((A\times B)\cup(B\times A) = D^2\right) \;\Leftrightarrow\; (A = B = D)$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) Traitée en cours.
5) $\overline{B}\backslash\overline{A} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cap A = A\backslash B$.
6) $A\backslash(B \cap D) = A \cap \overline{B \cap D} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{D}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{D}) = (A\backslash B) \cup (A\backslash D)$.
7) Il est clair que, si $A = B = D$, alors $(A \times B) \cup (B \times A) = D^2$. Réciproquement, supposons que $(A \times B) \cup (B \times A) = D^2$.

   Soit $x \in D$. Alors $(x, y) \in D^2 = (A \times B) \cup (B \times A)$ donc $(x, y) \in A \times B$ ou $B \times A$. Il s'ensuit que $x \in A$ et $x \in B$. Nous en déduisons que $D \subset A$ et $D \subset B$.

   Soit $x \in A$. Donnons-nous $y \in B$ quelconque. On a $(x, y) \in A \times B$ donc $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ et donc $(x, y) \in D^2$. Ainsi $x \in D$. Nous en déduisons que $A \subset D$ et donc $A = D$.

   Soit $x \in B$. Donnons-nous $y \in A$ quelconque. On a $(x, y) \in B \times A$ donc $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$ et donc $(x, y) \in D^2$. Ainsi $x \in D$. Nous en déduisons que $B \subset D$ et donc $B = D$.

   Finalement $A = B = D$. D'où l'équivalence.

Exercice 6. Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ leur différence symétrique.

1) Déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
2) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
3) Montrer que $\overline{A\Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$.
4) Soit D une partie de A. Montrer que $A\Delta B = A\Delta D$ si et seulement si $B = D$.

Correction :

1) On a $A\Delta A = (A\backslash A) \cup (A\backslash A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ et $A\Delta\varnothing = (A\backslash\varnothing) \cup (\varnothing\backslash A) = A \cup \varnothing = A$.
2) En utilisant la distributivité de l'union sur l'intersection,

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= \Big((A \cap \overline{B}) \cup B\Big) \cap \Big((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\Big) \\
&= \Big((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)\Big) \cap \Big((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\Big) \\
&= (A \cup B) \cap E \cap E \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B \cap A}) = (A \cup B)\backslash(A \cap B).
\end{aligned}$$

3) D'après la question précédente,

$$\overline{A\Delta B} = \overline{(A \cup B) \cap (\overline{B \cap A})} = (\overline{A \cup B}) \cup (A \cap B).$$

4) Si $B = D$, alors $A\Delta B = A\Delta D$. Réciproquement, supposons que $A\Delta B = A\Delta D$.
   Soit $x \in B$. On a alors $x \in A \cup B$.
   - Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \notin A\Delta B$. Ainsi $x \notin A\Delta D$. Comme $x \in A$, $x \in A \cup D$ et donc $x \in A \cap D$. Nous en déduisons que $x \in D$.
   - Si $x \notin A$, alors $x \notin A \cap B$ et donc $x \in A\Delta B$. Ainsi $x \in A\Delta D$. Comme $x \notin A$, $x \notin A \cap D$ et donc $x \in A \cup D$. Nous en déduisons que $x \in D$.

   Ainsi $B \subset D$. On montre de même que $D \subset B$.

Exercice 7. Expliciter

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[, \qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}\,;\frac{2p+1}{p}\right[\qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k\,;-\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k}\,;k\right]\right).$$

Correction :

- Montrons que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\}$ par double inclusion.

  — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$. Ainsi $0 \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$. Nous en déduisons que $\{0\} \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$.

  — Réciproquement, donnons-nous $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $x \in \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient que $0 \leqslant x \leqslant 0$ et donc $x = 0$. Ainsi $x \in \{0\}$. Nous en déduisons que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[\subset \{0\}$.

  — Réciproquement, donnons-nous $x \in \displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{p} \leqslant x < 2 + \frac{1}{p}$. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient $0 \leqslant x \leqslant 2$. Ainsi $\displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[\subset [0,2]$.

- Traitée en cours.

- Montrons que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k},k\right]\right) = \mathbb{R}^*$ par double inclusion.

  — Si $x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k},k\right]\right)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $-k \leqslant x < -\frac{1}{k}$ ou $\frac{1}{k} \leqslant x \leqslant k$. En particulier $x \in \mathbb{R}^*$.

  — Réciproquement, donnons-nous $x \in \mathbb{R}^*$. La suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k_0} < |x| \leqslant k_0$. Ainsi $\mathbb{R}^* \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k},k\right]\right)$.

    — Si $|x| \geqslant 1$, alors posons $k_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1 \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On a $k_0 - 1 \leqslant |x| < k_0$. Comme $\frac{1}{k_0} \leqslant \frac{1}{2} < 1$, on obtient $\frac{1}{k_0} < |x| \leqslant k_0$. Ainsi $x \in \left[-k_0,-\frac{1}{k_0}\right[\cup \left]\frac{1}{k_0},k_0\right]$.

    — Si $|x| < 1$, alors posons $k_0 = \left\lfloor \frac{1}{|x|} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On a $k_0 - 1 \leqslant \frac{1}{|x|} < k_0$. Comme $\frac{1}{k_0 - 1} \geqslant 1$, on obtient $\frac{1}{k_0} < |x| \leqslant k_0$. Ainsi $x \in \left[-k_0,-\frac{1}{k_0}\right[\cup \left]\frac{1}{k_0},k_0\right]$.

  Ainsi $\mathbb{R}^* \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup \left]\frac{1}{k},k\right]\right)$.

Exercice 8. (★ à ★★) Montrer que les applications suivantes sont des bijections et expliciter leurs réciproque.

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{5\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3+2x}{x-5} \end{array}$

2) $h : \begin{array}{ccc} [-1/2\,;+\infty[& \longrightarrow & \left[\sqrt{3}/2\,;+\infty\right[\\ y & \longmapsto & \sqrt{y^2+y+1} \end{array}$

3) $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \longmapsto & (s+2t, 5t-3s) \end{array}$

4) $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1\,;1[\\ t & \longmapsto & \dfrac{e^t-1}{e^t+1} \end{array}$

5) $g : \begin{array}{ccc}]0\,;3] & \longrightarrow & [0\,;2[\\ z & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4-z}{2} & \text{si} \quad z \in]0\,;2[\,, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad z \in [2\,;3]\,. \end{array}\right. \end{array}$

Correction :

1) Traité en cours.

2) Traitée en cours.

3) Traitée en cours.

4) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1\,;1[$. On a

$$\begin{aligned} y = \varphi(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad (e^t+1)y = e^t - 1 \quad &&\Longleftrightarrow \quad ye^t + y = e^t - 1 \\ & &&\Longleftrightarrow \quad e^t(y-1) = -1-y \\ & &&\Longleftrightarrow \quad e^t = \frac{1+y}{1-y}, \end{aligned}$$

puisque $y \neq 1$. Ensuite, comme $y \in]-1\,;1[$, on a $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$ et donc, par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$y = \varphi(t) \quad \Longleftrightarrow \quad t = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Ainsi φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;1[$ et

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \end{array}.$$

5) Soient $z \in]0\,;3]$ et $y \in [0\,;2[$.

- Soit $z \in]0\,;2]$. On a alors $4-z \in [2\,;4[$ et donc $g(z) \in [1\,;2[$. Si $y \in [1\,;2[$, alors

$$y = g(z) \quad \Longleftrightarrow \quad 2y = 4-z \quad \Longleftrightarrow \quad z = 4-2y.$$

- Soit $z \in [2\,;3[$. On a alors $z-2 \in [0\,;1[$ donc $g(z) = (z-2)^2 \in [0\,;1[$. Si $y \in [0\,;1[$, alors

$$y = g(z) \quad \Longleftrightarrow \quad z-2 = \sqrt{y} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 2+\sqrt{y}.$$

Ainsi g est une bijection de $]0,3]$ sur $[0,2[$ et

$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,2[& \longrightarrow &]0,3] \\ y & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} 2+\sqrt{y} & \text{si} \quad y \in [0\,;1]\,, \\ 4-2y & \text{si} \quad y \in]1,2[. \end{array}\right. \end{array}$$

Exercice 10. Soit A une partie infinie[1] de $\mathbb{N}$. On pose $a_0 = \min(A)$, $a_1 = \min(A\backslash\{a_0\})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \min(A\backslash\{a_0; a_1; \ldots; a_n\})$.

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Montrer que l'application $n \in \mathbb{N} \longmapsto a_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.

1. C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in A$ tel que $a \notin [\![1, n]\!]$

Correction :

1) Raisonnons par récurrence forte. Puisque A est une partie non vide (puisqu'elle est infinie) de $\mathbb{N}$, elle admet un minimum et donc a_0 est bien défini.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_0, \ldots, a_n$ sont bien définis. Ce sont des éléments de A (par définition du minimum) et l'ensemble $A \backslash \{a_0, \ldots, a_n\}$ est non vide (sinon $A = \subset \{a_0, \ldots, a_n\}$ et donc A serait fini) donc il admet un minimum. Autrement dit a_{n+1} est bien défini.

   Par récurrence, on en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Déjà il s'agit bien d'une application de $\mathbb{N}$ dans A.

   - Soient n et m deux entiers tels que $n \neq m$. Quitte à les échanger, supposons que $n < m$. On a alors $a_n \in \{a_0, \ldots, a_m\}$ donc $a_n \notin A \backslash \{a_0, \ldots, a_m\}$. Mais a_m étant le minimum de cet ensemble, il lui appartient et donc $a_m \neq a_n$.

     On en déduit que $n \longmapsto a_n$ est injective.

   - Remarquons d'abord que la suite est strictement croissante et donc, en particulier, tous les termes sont distincts.

     Soit $x \in A$. Comme x est un entier, il y a un nombre fini de termes de la suite qui sont strictement inférieurs à x (sinon il y aurait une infinité d'entiers naturels strictement inférieurs à x, ce qui est absurde). Notons n_0 l'indice du plus grand terme de la suite qui est strictement inférieur à x (ici on utilise, sans le dire, le fait qu'une partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément). L'ensemble $A \backslash \{a_0, \ldots, a_{n_0}\}$ admet alors x pour minimum et donc $x = a_{n_0+1}$.

     On en déduit que $n \longmapsto a_n$ est surjective.

   Il s'agit bien d'une bijection de $\mathbb{N}$ dans A.

Exercice 13. Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$.

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?

2) Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Correction :

1) Supposons que f ou g sont injectives. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $h(x) = h(x')$. Nous avons alors $(f(x), g(x)) = (f(x'), g(x'))$.

   - Dans le cas où f est injective, puisqu'on a $f(x) = f(x')$, on en déduit que $x = x'$.
   - Dans le cas où g est injective, puisqu'on a $g(x) = g(x')$, on en déduit que $x = x'$.

   Ainsi $x = x'$ et donc h est injective.

   La réciproque est fausse car les fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^2 + 1$ ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$. Pourtant $h : x \longmapsto (x^2, (x-1)^2)$ est injective sur $\mathbb{R}^2$. En effet, donnons-nous des réels x et x' tels que $h(x) = h(x')$. On a alors $x^2 = x'^2$ et $(x-1)^2 = (x'-1)^2$. Si jamais on a $x \neq x'$ alors $x = -x'$ donc $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (-x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$ donc $-2x = 2x$ et donc $x = 0 = x'$. C'est absurde. Nous en déduisons que $x = x'$.

2) Supposons que h est surjective.

   - Soit $y \in F$. Donnons-nous $z \in G$ (*on peut le supposer non vide sinon l'exercice n'est pas très intéressant*). Puisque $(y, z) \in F \times G$, il existe $x \in E$ tel que $(y, z) = h(x)$. En particulier $f(x) = y$. Ainsi f est surjective.
   - Soit $s \in G$. Donnons-nous $t \in F$ (*on peut le supposer non vide sinon l'exercice n'est pas très intéressant*). Puisque $(t, s) \in F \times G$, il existe $x \in E$ tel que $(t, s) = h(x)$. En particulier $g(x) = s$. Ainsi g est surjective.

   La réciproque est fausse car les fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x+1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pourtant $h : x \longmapsto (x, x+1)$ n'est pas surjective (par exemple $(0, 2)$ n'admet pas d'antécédent par h).