Correction de quelques exercices de la feuille de TD 8

Exercice 1. (★ à ★★) Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

1) e^{n^α}, $\alpha > 0$,
2) e^{1/n^α}, $\alpha > 0$,
3) $n^{1+\sqrt{n}}$,
4) $\dfrac{(-3)^n}{n^2}$,
5) $\dfrac{e^{-n^2}}{n^3}$,
6) $\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{5}{n}\right)^n$,
7) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$,
8) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$, $x \in \mathbb{R}$,
9) $n\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
10) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
11) $\dfrac{\ln(n^3)}{n\sqrt{n}}$,
12) $2^{2n}-\sqrt{n}3^n$.
13) $\dfrac{8^n}{e^{3n}}$,
14) $2^{2n}e^{-3n}$,
15) $\dfrac{3^n-n^2e^n}{3^n+n^2e^n}$,
16) $\dfrac{\sin(n^ne^{n^3})}{n^{3/2}}$,
17) $\cos(\pi n)$,
18) $\sin(\pi 4^n)$,
19) $\dfrac{1}{n}\ln(n+e^{-2023n})$,
20) $\dfrac{(-1)^{n^2}+(n+1)^2+\cos(1-n)}{4n^2+\sin(\sqrt{n})+10n\ln(n)}$,
21) $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}$,
22) $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}$,
23) $-n^3+\sqrt{n^6+\sin(2023^n)}$,
24) $\dfrac{\lfloor(2n-1)^3\rfloor}{\lfloor(6n+7)^3\rfloor}$,
25) $\sqrt[n]{n}$

Correction : Toutes ont été traitées en cours sauf les 21 et 22.

21) On se retrouve face à une forme indéterminée (du type « $\infty-\infty$ »). On utilise la technique de la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1} &= \frac{(\sqrt{n^3+n+1})^2-(\sqrt{n^3-n+1})^2}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}\\ &= \frac{(n^3+n+1)-(n^3-n+1)}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}\\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}\end{aligned}$$

On se retrouve encore face à une forme indéterminée (du type « ∞/∞ » cette fois). On peut mettre $n^{3/2}$ en facteur au dénominateur :

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1} &= \frac{2n}{\sqrt{n^3(1+1/n^2+1/n^3)}+\sqrt{n^3(1-1/n^2+1/n^3)}}\\ &= \frac{2n}{n^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2+1/n^3}+\sqrt{1-1/n^2+1/n^3}}.\end{aligned}$$

On a $\dfrac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, $\dfrac{1}{n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue en 1 donc

$$\sqrt{1+1/n^2+1/n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-1/n^2+1/n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

Enfin $\dfrac{2n}{n^{3/2}}=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ si bien que $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

22) On utilise la technique de la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)^2-\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}$$
$$= \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}.$$

On recommence :

$$\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Finalement

$$\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}$$

et on montre que ce terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Soient $q \in]0\,;+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \frac{q^n+n^\alpha}{1+\big(\ln(n)\big)^\beta}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q, α et β.

Correction : *C'est juste l'application des formules de croissances comparées. La difficulté vient du fait qu'il faut faire plusieurs cas et sous-cas.*

- *Premier cas :* $\beta \leqslant 0$

  Dans ce cas, $1+\big(\ln(n)\big)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta<0 \\ 2 & \text{si} \quad \beta=0 \end{cases}$.

  — Si $q>1$, alors $\dfrac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparées si $\alpha>0$, par quotient sinon) donc $q^n+n^\alpha = q^n\left(1+\dfrac{n^\alpha}{q^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  — Si $q<1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha<0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha>0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha=0 \text{ et } \beta<0 \\ 1/2 & \text{si} \quad \alpha=\beta=0 \end{cases}$

  — Si $q=1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha>0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha<0 \text{ et } \beta<0 \\ 1/2 & \text{si} \quad \alpha<0 \text{ et } \beta=0 \\ 2 & \text{si} \quad \alpha=0 \text{ et } \beta<0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha=\beta=0 \end{cases}$

- *Deuxième cas :* $\beta>0$

  Dans ce cas $1+\big(\ln(n)\big)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1+\big(\ln(n)\big)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  — Si $q>1$, alors $\dfrac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparées si $\alpha>0$, par quotient sinon) et $\dfrac{q^n}{(\ln(n))^\beta} = \dfrac{q^n}{n}\dfrac{n}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (par croissance comparées). Ainsi

$$u_n = \frac{q^n}{(\ln(n))^\beta}\,\frac{1}{1+(\ln(n))^{-\beta}}\left(1+\frac{n^\alpha}{q^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

— Si $q \leqslant 1$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $(q^n + n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

— Si $q \leqslant 1$ et $\alpha > 0$, alors $\dfrac{n^\alpha}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (par croissances comparées) et donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{(\ln(n))^\beta} \frac{1}{1+(\ln(n))^{-\beta}} \left(\frac{q^n}{n^\alpha} + 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$(q^n + n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0.7$, $u_2 = 0.77$, $u_3 = 0.777$, $u_4 = 0.7777$... et de manière générale

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 0.\underbrace{777777\cdots777}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que la suite converge vers un réel que l'on précisera.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
u_n &= 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \cdots + 0,\underbrace{000\cdots000}_{n-1 \text{ fois}}7 \\
&= \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \cdots + \frac{7}{10^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{7}{10^k} = 7\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 7\left(\frac{1-(1/10)^n}{1-1/10} - 1\right) = 7\,\frac{10}{9}\left(\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{10} \in\,]-1, 1[$, il vient que $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{7}{9}$.

Exercice 7 (Les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite).

1) Justifier que ni $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ni $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent vers $\pm\infty$.

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L_1 \in \mathbb{R}$.

   a) À l'aide de la formule d'addition pour $\sin(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, montrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L_2 que l'on exprimera en fonction de L_1.

   b) Montrer que
$$\begin{cases} \cos(1)\times L_1 & + & \sin(1)\times L_2 & = & L_1 \\ -\sin(1)\times L_1 & + & \cos(1)\times L_2 & = & L_2 \end{cases}$$

   c) En déduire que $L_1 = L_2 = 0$.

   d) Aboutir à une absurdité.

   e) En déduire que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

3) Conclure que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite non plus.

Correction :

1) Les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas tendre pas vers $\pm\infty$ puisqu'elles sont bornées (par 1).

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$. Puisque $\sin(1) \neq 0$, on a

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers L_1 donc, par opérations algébriques sur les limites,

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{L_1 - L_1\cos(1)}{\sin(1)} = L_2.$$

b) La première ligne du système découle de la question précédente. Pour obtenir la deuxième ligne, on écrit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$. Par opérations algébriques sur les limites, la suite $(\cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_2\cos(1) - L_1\sin(1)$. Mais il s'agit de la suite $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L_2. Par unicité de la limite, on obtient que $L_2 = -\sin(1)L_1 + \cos(1)L_2$.

c) Les limites L_1 et L_2 sont solutions de

$$\begin{cases} (\cos(1)-1)\times L_1 & + & \sin(1)\times L_2 & = & 0 \\ -\sin(1)\times L_1 & + & (\cos(1)-1)\times L_2 & = & 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{cases} (\cos(1)-1)\sin(1)\times L_1 & + & \sin(1)^2\times L_2 & = & 0 \\ -\sin(1)(\cos(1)-1)\times L_1 & + & (\cos(1)-1)^2\times L_2 & = & 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient $\big(\sin(1)^2 + (\cos(1)-1)^2\big)L_2 = 0$ et donc $L_2 = 0$. Ainsi $-\sin(1)L_1 = 0$ et donc $L_1 = 0$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$. Par unicité de la limite, on obtient donc $0 = L_1^2 + L_2^2 = 1$. C'est absurde.

e) On en déduit que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et, comme elle ne tend pas non plus vers $\pm\infty$, elle n'admet pas de limite.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. On a alors

$$\sin(n) = \frac{\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)}{\sin(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{L_1\cos(1) - L_1}{\sin(1)}.$$

C'est absurde. Donc $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et, comme elle ne tend pas non plus vers $\pm\infty$, elle n'admet pas de limite.

Exercice 8. Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$. Nous définissons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 < a_n < b_n$.
2) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
On pourra montrer que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-géométrique et utiliser le résultat de l'exercice 4.
3) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée a_0, b_0, n et renvoie les valeurs de a_n et b_n.

Correction :

1) Procédons par récurrence. Déjà a_0 et a_0 sont bien définis et $0 < a_0 < b_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 < a_n < b_n$. Il s'ensuit que $a_n b_n > 0$ donc $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ est bien défini et strictement positif. Bien sûr b_{n+1} est bien défini aussi et

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2} > 0,$$

puisque $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \neq 0$ (sinon on aurait $a_n = b_n$). Ainsi $0 < a_{n+1} < b_{n+1}$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 < a_n < b_n$.

2) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}} > 1$, puisque $b_n > a_n$ et que la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$. Ainsi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{b_n - a_n} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2(b_n - a_n)} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})} = \frac{\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}}{2\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}} < \frac{1}{2},$$

  puisque $0 < \sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} < \sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}$. Ainsi la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]0\,;1[$. D'après l'exercice 4, on a alors $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite.

3)

```
def suites(a0,b0,n):
    a=a0
    b=b0
    for k in range(n):
    a,b=(a*b)**(1/2),(a+b)/2
    return [a,b]
```

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée la série harmonique.

1) Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant c$.
2) Déterminer la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, on a $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$. Ainsi

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

   Ainsi $c = \frac{1}{2}$ convient.

2) La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

   Le théorème de convergence monotone entraîne qu'elle admet une limite finie ou $+\infty$.

   Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle admet une limite finie ℓ. On a $H_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En passant à la limite, dans l'inégalité de la question 1, on obtient $0 \geqslant \frac{1}{2}$. C'est absurde

   Ainsi $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)^2$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2) Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{3}(x-3)^2$. Étudier les variations de $f \circ f$ sur $[0\,;3]$.
3) En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes.
5) Est-ce-que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Correction :

1) On a $u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. On a alors $-3 \leqslant u_n - 3 \leqslant 3$. Par décroissante de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$, il vient que $0 \leqslant (u_n-3)^2 \leqslant 9$ et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2) *Méthode 1 :* Pour tout $x \in [0\,;3]$,

$$f \circ f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x-3)^2 - 3\right)^2 = \frac{((x-3)^2-9)^2}{27} = \frac{(x^2-6x)^2}{27} = \frac{x^2(x-6)^2}{27} = \frac{x^2(x-6)^2}{27}$$

   Puisqu'elle est polynomiale, $f \circ f$ est dérivable sur $[0\,;3]$ et

$$\forall x \in [0\,;3]\,, \qquad (f\circ f)'(x) = \frac{2x(x-6)^2 + x^2 2(x-6)}{27} = \frac{2x(x-6)(x-6+x)}{27} = \frac{4x(x-6)(x-3)}{27} \geqslant 0.$$

   Ainsi $f \circ f$ est strictement croissante sur $[0\,;3]$.

   Méthode 2 : Soient x et y dans $[0\,;3]$ tel que $x < y$. On a $-3 \leqslant x-3 < y-3 \leqslant 0$ donc $0 \leqslant (y-3)^2 < (x-3)^2 \leqslant 9$ et donc $0 \leqslant f(y) < f(x) \leqslant 3$. Ainsi f est strictement décroissante sur $[0\,;3]$ et à valeurs dans $[0\,;3]$. On en déduit que $0 \leqslant f(f(x)) < f(f(y)) \leqslant 3$. Ainsi $f \circ f$ est strictement croissante sur $[0\,;3]$.

3) On a $u_0 = \dfrac{3}{2}$, $u_1 = \dfrac{(3/2-3)^2}{3} = \dfrac{9/4}{3} = \dfrac{3}{4}$, $u_2 = \dfrac{(3/4-3)^2}{3} = \dfrac{81/16}{3} = \dfrac{27}{16} > \dfrac{24}{16} = \dfrac{3}{2} = u_0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $[0\,;3]$ et que $f\circ f$ est strictement croissante sur $[0\,;3]$, on obtient que $u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(u_{2n+2}) = u_{2n+4}$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. Nous en déduisons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $[0\,;3]$ et que f est strictement décroissante sur $[0\,;3]$, on obtient que $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+1}) = u_{2n+3}$. Nous en déduisons que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Puisqu'elle est majorée par 3 et croissante, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel de $[u_0, 3] = [3/2, 3]$, d'après le théorème de la limite monotone.
   Puisqu'elle est minorée par 0 et décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel de $[0, u_1] = [0, 3/4]$, d'après le théorème de la limite monotone.

   En particulier $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes.

5) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeraient vers cette même limite. Ce n'est pas le cas si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 14. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

Correction : Déjà, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et strictement positif (donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k > 0$ et u_{n+1} a un sens).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ donc $u_n^2 + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}^2$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. On a alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2+u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} > 0.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Le théorème de la limite monotone entraîne alors qu'elle converge vers un réel ℓ. On a alors $u_n^2 + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2 + \ell$ et $u_{n+1}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2$. Par unicité de la limite, il vient que $\ell^2 = \ell^2 + \ell$ et donc $\ell = 0$. C'est absurde, puisque $u_0 > 0$ et que la suite est croissante.

Ainsi la suite n'est pas majorée. Le théorème de la limite monotone entraîne alors que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 16. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Correction : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers une limite finie ℓ. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\ell - \frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{1}{4}$. L'intervalle $\left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right]$ est d'amplitude $\frac{1}{2}$ donc il contient au plus un entier (et il en contient au moins un : l'entier u_{n_0}). Pour tout $n \geqslant n_0$, u_n est un entier qui appartient à cet intervalle donc $u_n = u_{n_0}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 17. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie $x_n \geqslant \sup(A) - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire qu'elle converge vers $\sup(A)$.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup(A) - \dfrac{1}{n+1} < \sup(A)$ donc, par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_n \in A$ tel que $x_n \geqslant \sup(A) - \dfrac{1}{n+1}$.

Mais, puisque $\sup(A)$ est un majorant de A, on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sup(A) - \frac{1}{n+1} \leqslant x_n \leqslant \sup(A).$$

Comme $\sup(A) - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$, par encadrement, on obtient que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$.

Ce résultat est intéressant : la borne supérieure de A est limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Nous montrerons dans le chapitre 16 que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln(2)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

1) a) Pour $\varepsilon > 0$, déterminer un rang n tel que, $|S_n - \ln(2)| \leqslant \varepsilon$.

   b) Écrire une fonction appelée `ln2` qui prend en argument $\varepsilon > 0$ et qui détermine une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près en utilisant la question précédente.

2) Écrire une fonction qui prend en argument $\varepsilon > 0$ et qui détermine le plus petit rang n tel que, $|S_n - \mathtt{ln2}(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$.

Correction :

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. Compte tenu de l'inégalité fournie, il suffit que n soit tel que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$. Ceci est équivalent à $n+1 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Il suffit donc de prendre $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$.

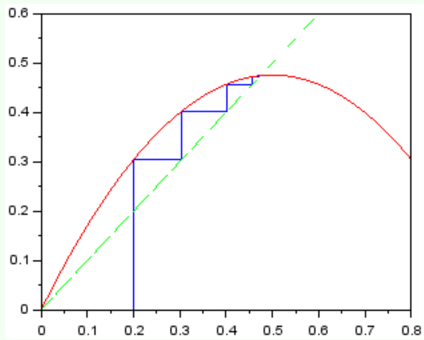
   b)
```python
def ln2(eps):
    n=int(1/eps)
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+(-1)**(k+1)/k
    return S
```

2)
```python
 import numpy as np
def rang(eps):
    k=0
    S=0
    while np.abs(S-np.log(2))>eps:
        k=k+1
        S=S+(-1)**(k+1)/k
    return k
```

Exercice 20 (Représentation de suites récurrentes).

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction telle que la suite est bien définie. On suppose que la fonction f a été implémentée en Python par la fonction `f`.

   Écrire une fonction Python appelée `TraceSuite` qui prend en argument la fonction f, trois réels a, b, u_0 tels que $a < b$ et un entier naturel n et qui représente les n premiers termes de la suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme on l'a vu dans les exercices précédents (cf. exemple ci-contre), i.e. qui trace le graphe de fonction f sur $[a\,;b]$, la première bissectrice des axes et qui relie les points



$$(u_0, 0), (u_0, u_1), (u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_3) \ldots, (u_{n-2}, u_{n-1}), (u_{n-1}, u_{n-1}), (u_{n-1}, u_n).$$

   Il suffit de créer une liste `X` *contenant deux fois* u_0 *et une liste* `Y` *contenant* 0*, puis de rajouter deux fois le terme suivant à chaque liste pendant* n *étapes, et enfin de rajouter le dernier terme à la liste* `Y`.

2) Tester avec $u_0 = 1/2$, $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \longmapsto \alpha x(1-x)$ pour $\alpha \in \{1,5; 3; 3.4; 3.5; 3.6; 3.8; 3.83; 3.86; 3.9\}$. Commenter.

Correction :

1)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def TraceSuite(f,a,b,u0,n):
    u=u0
    X=[u,u]
    Y=[0]
    for i in range(1,n+1):
        u=f(u)
        X=X+[u,u]
        Y=Y+[u,u]
    Y=Y+[f(u)]
    plt.plot(X,Y)
    plt.plot([a,b],[a,b])
    Xf=np.linspace(a,b,1000)
    Yf=[f(x) for x in Xf]
    plt.plot(Xf,Yf)
```

2)

```python
for alpha in [1.5,3,3.4,3.5,3.6,3.8,3.83,3.86,3.9]:
    def f(x):
        return alpha*x*(1-x)
    plt.figure()
    TraceSuite(f,0,1,1/2,100)
    plt.title('cas où alpha='+str(alpha))

plt.show()
```

Je vous laisse tester chez vous. On a une suite très chaotique : une petite variation de α peut créer un changement radical de comportement de la suite.