Correction de quelques exercices de la feuille de TD 7

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n et étudier les variations.

1) $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = \pi, \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n, \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}, \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+1}, \end{cases}$

Correction :

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1/e^2$. Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_1 \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \frac{1}{e^{2n}}.$$

Il s'agit d'une suite décroissante.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Posons $x = \dfrac{\pi}{2}$ de telle sorte que $x = -x + \pi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - x$. Nous avons alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+1} = u_{n+1} - x = -u_n + \pi + x - \pi = -(u_n - x) = -v_n.$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 et de terme initial $u_0 - x = -2 - \dfrac{\pi}{2}$. Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = v_n + x = \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right)(-1)^n + \frac{\pi}{2}.$$

On a $u_0 = -2$, $u_1 = 2 + \dfrac{\pi}{4}$ et $u_2 = -2$ donc la suite n'est pas monotone.

3) Traitée en cours.

4) Traitée en cours.

5) Traitée en cours.

6) La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 7 = 0$. Elle admet $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$ pour racines. Par conséquent il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \lambda(\sqrt{7})^n + \mu(-\sqrt{7})^n.$$

En particulier $1 = u_1 = \lambda + \mu$ et $0 = u_2 = \lambda\sqrt{7} - \mu\sqrt{7}$. Ainsi $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{(\sqrt{7})^n + (-\sqrt{7})^n}{2}.$$

Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = 0$ et $u_{2n+1} = 7^n$. La suite n'est donc pas monotone.

Exercice 2. Donner une expression explicite du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Correction : Déterminons une solution constante, c'est-à-dire un réel x tel que $x = \frac{x}{6} + 5$. On trouve $x = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $t_n = u_n - x$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad t_{n+1} = u_{n+1} - x = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 - \left(\frac{x}{6} + 5\right) = \frac{1}{6}(u_n - x) = \frac{t_n}{6}.$$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de terme initial $t_0 = u_0 - 6 = -7$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = t_n + 6 = -\frac{7}{6^n} + 6.$$

Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{7}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = -\frac{7}{n}\,\frac{1}{6}\,\frac{1-6^{-n}}{1-6^{-1}} + 6 = 6 - \frac{7}{5n}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right).$$

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n.$$

1) Écrire une fonction Python qui prend un entier naturel n en entrée et qui renvoie u_n et v_n.
2) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4) En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1)

```
def EXO3(n):
    u=-2
    v=1
    for k in range(n):
        aux=5*u+4v
        u=v
        v=aux
    return u,v
```

ou bien

```
def EXO3(n):
    u=-2
    v=1
    for k in range(n):
        u,v=v,5*u+4v
    return u,v
```

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 5u_n + 4v_n - (4u_n + 5v_n) = u_n - v_n.$$

Ainsi $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (égale à $u_0 - v_0 = -3$).

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 5u_n + 4v_n + 4u_n + 5v_n = 9(u_n + v_n).$$

Ainsi $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 9 et de terme initial $u_0 + v_0 = -1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n + v_n = -9^n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{u_n + v_n + (u_n - v_n)}{2} = \frac{3 - 9^n}{2} \qquad \text{et} \qquad u_n = \frac{u_n + v_n - (u_n - v_n)}{2} = \frac{3 + 9^n}{2}.$$

Exercice 7 (D'après EML 2019). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On suppose que l'on a codé la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction Python `suite_u`. Écrire une fonction qui prend en argument n et qui renvoie v_n.

Correction :

```
def suite_v(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+suite_u(k)
    return S/(n*(n+1))
```

Exercice 9 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : une autre preuve). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On suppose que le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$ de l'équation caractéristique de cette suite est positif ou nul.

1) a) Soit r une solution de l'équation $x^2 = ax + b$. Justifier que $r \neq 0$.

b) Que dire de $\dfrac{-b}{r}$?

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{r^n}$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique donc on précisera la raison.

b) A l'aide d'une somme télescopique, en déduire une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
On distinguera deux cas selon que $b + r^2$ est nul ou non.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ selon que $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$.

Correction :

1) a) Si $r = 0$ est solution, alors $b = ar + b = r^2 = 0$, ce qui est exclu. Par conséquent, $r \neq 0$.

b) On a $\left(\dfrac{-b}{r}\right)^2 - a\left(\dfrac{-b}{r}\right) - b = \dfrac{b(b + ar - r^2)}{r^2} = 0$. Ainsi $\dfrac{-b}{r}$ est racine de $x^2 = ax + b$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{u_{n+2}}{r^{n+2}} - \frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{au_{n+1} + bu_n}{r^{n+2}} - \frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} &= \frac{(a-r)u_{n+1} + bu_n}{r^{n+2}} \\ &= \frac{(ar - r^2)u_{n+1} + bru_n}{r^{n+3}} \\ &= \frac{-bu_{n+1} + bru_n}{r^{n+3}} \\ &= \frac{-b}{r^2}\left(\frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{u_n}{r^n}\right) = \frac{-b}{r^2} w_n. \end{aligned}$$

Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{-b}{r^2}$.

b) Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = w_0 \left(-\frac{b}{r^2}\right)^n.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_0 \left(-\frac{b}{r^2}\right)^k = v_0 + w_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{b}{r^2}\right)^k.$$

- Si $b + r^2 \neq 0$, alors $-\dfrac{b}{r^2} \neq 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 + w_0 \frac{1 - (-b/r^2)^n}{1 - (-b/r^2)}.$$

- Si $b + r^2 = 0$, alors $-\dfrac{b}{r^2} = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 + w_0\, n \left(\frac{-b}{r^2}\right)^n = v_0 + w_0\, n.$$

c) Nous en déduisons que

- Si $b + r^2 \neq 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r^n v_n = v_0 r^n + w_0 \frac{r^n - (-b/r)^n}{1 - (-b/r^2)} = \left(v_0 + \frac{w_0 r^2}{r^2 + b}\right) r^n + \left(-\frac{w_0 r^2}{r^2 + b}\right)\left(\frac{-b}{r}\right)^n.$$

- Si $b + r^2 = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n v_n = r^n(v_0 + w_0\, n)$.

On peut conclure :

- Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$, alors $x^2 = ax + b$ admet deux solutions réelles qui sont $r_1 = r$ et $r_2 = \dfrac{-b}{r}$. On a bien montré qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$, alors $x^2 = ax + b$ admet r pour unique solution réelle. On a bien montré qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n(\lambda + \mu n).$$

Exercice 11. Écrire une fonction en Python qui prend en argument un entier naturel n et un réel x et qui renvoie la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ sans utiliser de puissances.

Correction : On remarque que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $u_0 = x^0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = x \times u_k$.

```
def Somme(n,x):
    u=1
    S=1
    for k in range(n):
        u=u*x
        S=S=u
    return S
```

Exercice 13 (Intégrales de Wallis (Ecricome 2019)). On se donne une suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

Écrire une fonction en Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie W_n.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et donc $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$W_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2}W_{2k}$$

et

$$W_{2k+3} = \frac{2k+2}{2k+3}W_{2k+1}.$$

On distingue donc selon la parité de n.

```python
import numpy as np
def Wallis(n):
    p=n//2#Ainsi n=2p si n est pair et n=2p+1 si n est impair
    if n==2*p:#Selon que n est pair ou non, on initialise à pi/2 ou à 1
        W=np.pi/2
        for k in range(p):
            W=W*(2*k+1)/(2*k+2)
    else:
        W=1
        for k in range(p):
            W=W*(2*k+2)/(2*k+3)
    return W
```

2. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des intégrales de Wallis et on l'étudiera en DM au moment du chapitre 16.