Correction de quelques exercices de la feuille de TD 6

Exercice 1.
1) Quels sont les antécédents de $-\sqrt{3}$, 0, π et 144 par $f : x \longmapsto (x-4)^2$?
2) Quels sont les antécédents de -32 et 243 par $f : x \longmapsto x^5$?

Correction :

1) • La fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc $-\sqrt{3}$ n'admet pas d'antécédent par f.
   • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = 0$ si et seulement si $x - 4 = 0$ si et seulement si $x = 4$. Ainsi 0 admet 4 pour unique antécédent par f.
   • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = \pi$ si et seulement si $x - 4 = \sqrt{\pi}$ ou $x - 4 = -\sqrt{\pi}$ si et seulement si $x = 4 + \sqrt{\pi}$ ou $x = 4 - \sqrt{\pi}$. Ainsi π admet $4 + \sqrt{\pi}$ et $4 - \sqrt{\pi}$ pour antécédents par f.
   • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = 144$ si et seulement si $x - 4 = \sqrt{144} = 12$ ou $x - 4 = -\sqrt{144} = -12$ si et seulement si $x = 16$ ou $x = -8$. Ainsi 144 admet 16 et -8 pour antécédents par f.

2) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc tout réel admet au plus un antécédent.

   En effet, si un réel y admet deux antécédents distincts x et z (avec $x < z$) par f, alors $f(x) < f(z)$ et donc $y < y$: c'est absurde.

   Comme $-32 = (-2)^5$, -2 est l'unique antécédent de -32 par f. Comme $243 = 3^5$, 3 est l'unique antécédent de 243 par f.

Exercice 2. Déterminer $f(A)$ dans les cas suivants :
1) $f : x \longmapsto x^2$ et $A =]-3\,;+\infty[$,
2) $f : x \longmapsto 2 - x^3$ et $A =]2\,;+\infty[$,
3) $f : x \longmapsto |x+2|$ et $A = [-4\,;-1/2[$,
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $A =]-4\,;0[\cup]0\,;3]$,
5) $f : x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $A =]-3\,;0[\cup]0\,;2]$.

Correction : *Toutes ces questions se traitent facilement en dérivant ces fonctions et en construisant le tableau de variation (je vous les laisse en exercice). Mais, ici, on peut tout faire « à la main » en montrant que :*

- *$f(A)$ est inclus dans un certain ensemble B (pour cela, on se donne $x \in A$ et on montrer que $f(x) \in B$).*
- *B est inclus dans $f(A)$ (pour cela, on se donne y dans B et on cherche un x dans A tel que $y = f(x)$).*

1) On a $f(A) \subset \mathbb{R}_+$ puisque la fonction carré est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   Réciproquement, si $y \in \mathbb{R}_+$, $x = \sqrt{y} \in A$ et $y = f(x) \in f(A)$. Ainsi $\mathbb{R}_+ \subset f(A)$ donc $f(A) = \mathbb{R}_+$.
2) Si $x \in]2\,;+\infty[$, alors $x^3 \geqslant 8$ donc $-x^3 \leqslant -8$ et donc $f(x) = 2 - x^3 \leqslant -6$. Ainsi $f(A) \subset [-\infty, -6[$.
   Réciproquement, si $y \in [-\infty, -6[$, $x = \sqrt[3]{2-y} \in A$ et $y = f(x) \in f(A)$. Ainsi $[-\infty, -6[\subset f(A)$ donc $f(A) = [-\infty, -6[$.
3) Si $x \in [-4\,;-1/2[$, alors $-2 \leqslant x + 2 \leqslant -3/2$ donc $f(x) = |x+2| \leqslant 2$. Ainsi $f(A) \subset [0, 2]$.
   Réciproquement, si $y \in [0, 2]$, $x = -y - 2 \in [-4, -2] \subset A$ et $y = |-y| = |x+2| = f(x) \in f(A)$. Ainsi $[0, 2] \subset f(A)$ donc $f(A) = [0, 2]$.
4) Si $x \in]-4, 0[$, $f(x) \in]-\infty, -1/4[$. Si $x \in]0, 3]$, $f(x) \in [1/3, +\infty[$. On en déduit que $f(A) =]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[$.
   Réciproquement, si $y \in]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[$, $x = \dfrac{1}{y} \in A$ et $y = f(x) \in f(A)$. Ainsi $]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[\subset f(A)$ et donc $f(A) =]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[$.

5) Si $x \in]-3,0[$, $x^2 \in]0,9[$ donc $\dfrac{1}{x^2} \in]1/9,+\infty[$ et donc $f(x) =]-\infty, 8/9[$. Si $x \in]0,2]$, $x^2 \in]0,4]$ donc $\dfrac{1}{x^2} \in [1/4,+\infty[$ et donc $f(x) =]-\infty, 3/4]$. Ainsi $f(A) \subset]-\infty,8/9[\cup]-\infty,3/4] =]-\infty,8/9[$.
Réciproquement, si $y \in]-\infty,8/9[$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} \in]-3,0[\subset A$ et $y = f(x) \in f(A)$. Ainsi $]-\infty,8/9[\subset f(A)$ et donc $f(A) =]-\infty,8/9[$.

Exercice 5. (★★ à ★★★) Étudier (domaine de définition, variation, limites, courbes) les fonctions suivantes puis écrire un programme Python qui les représente graphiquement.

1) $x \longmapsto \ln(x^2+x+2)$,
2) $x \longmapsto x^2-8x+15-|4-x|$,
3) $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$.
4) $x \longmapsto -\ln(|x^2-3x+2|)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$,
6) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right)$,
7) $x \longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
9) $x \longmapsto x^{x^{x^3}}$,
10) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

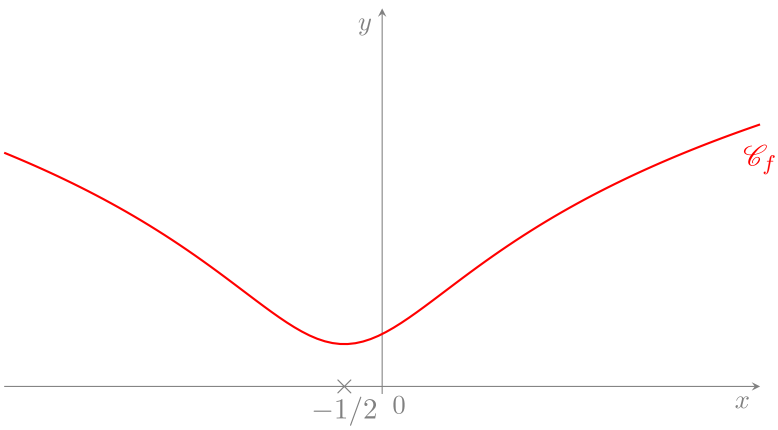
On montrera que la fonction de la question 5 admet la droite d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$ pour asymptote en $\pm\infty$.
On montrera que la fonction de la question 7 admet la droite d'équation $y = \dfrac{7x}{12}$ pour asymptote en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{12}$ pour asymptote en $-\infty$

Correction :

1) Notons $f : x \longmapsto \ln(x^2+x+2)$. La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \longmapsto x^2+x+2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives (car le discriminant de X^2+X+2 est strictement négatif). Par conséquent f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2} \underset{<}{>} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x+1 \underset{<}{>} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \underset{<}{>} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[-1/2,+\infty[$ (sur $]-\infty,-1/2]$). On a $f(-1/2) = 7/4$.
On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit la courbe :
D'où la courbe :



On peut l'obtenir avec Python :

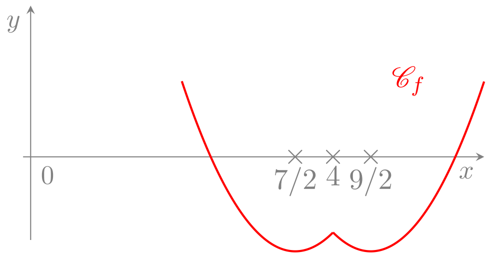
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    return np.log(x**2+x+2)

X=np.linspace(-5,5,10000)
Y=[f(x) for x in X]
```

```
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

2) Soit $f : x \longmapsto x^2 - 8x + 15 - |4 - x|$.

- Si $x \in]4, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 8x + 15 - (x - 4) = x^2 - 9x + 19$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]4, 9/2]$, strictement croissante sur $[9/2, +\infty[$.
- Si $x \in]-\infty, 4]$, $f(x) = x^2 - 8x + 15 - (4 - x) = x^2 - 7x + 11$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]-\infty, 7/2]$, strictement croissante sur $[7/2, 4]$.

On a enfin $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit l'allure de la courbe représentative de f



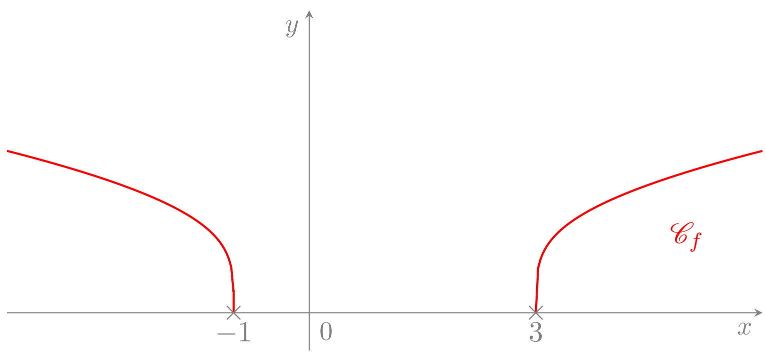
On peut l'obtenir avec Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    return x**2-8*x+15-np.abs(4-x)

X=np.linspace(2,6,10000)
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

3) D'abord le trinôme $X^2 - 2X - 3$ admet 16 pour discriminant donc $\dfrac{2+4}{2} = 3$ et $\dfrac{2-4}{2} = -1$ pour racines. Ainsi $f : x \longmapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$ est bien définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$. De plus f est dérivable sur $]-\infty, -1[$ et sur $]3, +\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{1}{4}(2x - 2)(x^2 - 2x - 3)^{1/4-1}$$

si bien que $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. On en déduit f est strictement croissante sur $[3, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$. Enfin $x^2 - 2x - 3 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$ et $\sqrt[4]{y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$. On en déduit la courbe représentative de f :



4) Traitée en cours.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 6 = 0$ si et seulement si $x = \pm\sqrt{3}$. On en déduit que $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 6}$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. De plus f est dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{3}[$, sur $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3}, +\infty[$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \qquad f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x - 2)(2x^2 - 6) - (x^3 + x^2 - 2x - 3)4x}{(2x^2 - 6)^2} = \frac{2(x^4 - 7x^2 + 6)}{(2x^2 - 6)^2}.$$

Le trinôme $X^2 - 7X + 6$ admet $49 - 24 = 25$ pour discriminant donc $\dfrac{7+5}{2} = 6$ et $\dfrac{7-5}{2} = 1$ pour racines. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \qquad f'(x) = \frac{2(x^2-6)(x^2-1)}{(2x^2-6)^2}$$

est du signe de $(x^2-6)(x^2-1)$.

On a $(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{3}$ et $(-\sqrt{3})^3 + (-\sqrt{3})^2 - 2(-\sqrt{3}) - 3 = -3\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} - 3 = -\sqrt{3}$ donc

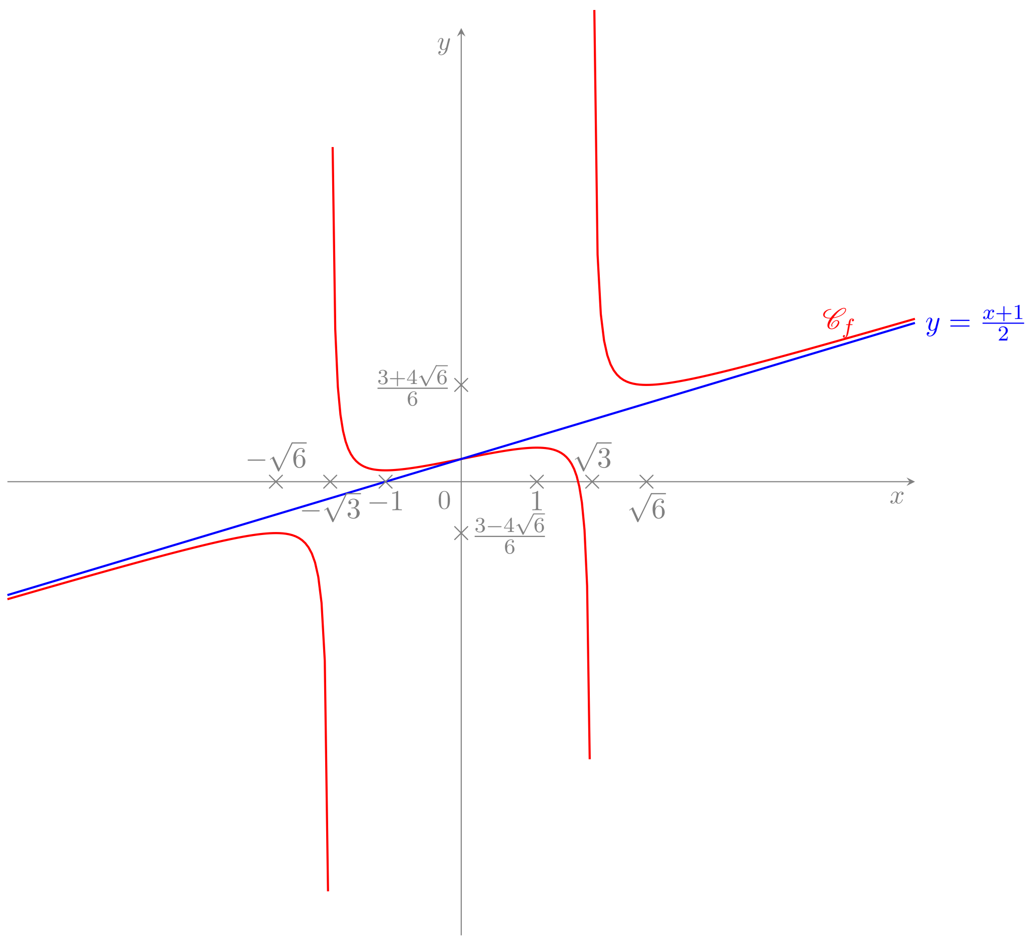
$$f(x) \xrightarrow[x \to (-\sqrt{3})^-]{} -\infty, \qquad f(x) \xrightarrow[x \to (-\sqrt{3})^+]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to (\sqrt{3})^-]{} -\infty, \qquad f(x) \xrightarrow[x \to (\sqrt{3})^+]{} +\infty.$$

On calcule aussi que $f(\sqrt{6}) = \dfrac{(\sqrt{6})^3 + (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} - 3}{2(\sqrt{6})^2 - 6} = \dfrac{6\sqrt{6} + 6 - 2\sqrt{6} - 3}{6} = \dfrac{3 + 4\sqrt{6}}{6}$, $f(-1) = \dfrac{1}{4}$, $f(1) = \dfrac{3}{4}$ et $f(-\sqrt{6}) = \dfrac{(-\sqrt{6})^3 + (-\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} - 3}{2(-\sqrt{6})^2 - 6} = \dfrac{-6\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{6} - 3}{6} = \dfrac{3 - 4\sqrt{6}}{6}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	$\frac{3-4\sqrt{6}}{6}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{3+4\sqrt{6}}{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a pu s'aider d'un tableau de signe pour déterminer le signe de la dérivée à partir du signe de $x^2 - 6$ et $x^2 - 1$.

On en déduit la courbe représentative (avec l'indication sur l'asymptote) :



Il reste à montrer que l'asymptote annoncée par l'énoncé en est bien une. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$. On a

$$f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6} - \frac{(x+1)(x^2-3)}{2x^2-6} = \frac{x^3+x^2-2x-3-(x^3-3x+x^2-3)}{2x^2-6}$$
$$= \frac{x}{2x^2-6} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0.$$

Ainsi $\mathscr{C}_f$ admet bien la droite d'équation $y = \dfrac{x+1}{2}$ pour asymptote en $\pm\infty$. Par ailleurs cette asymptote est en dessous (resp. au dessus) de la courbe au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
On peut l'obtenir avec Python :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    return (x**3+x**2-2*x-3)/(2*x**2-6)

a=3**(1/2)
X1=np.linspace(-6,-a-0.01,10000)
X2=np.linspace(-a+0.01,a-0.01,10000)
X1=np.linspace(a+0.01,6,10000)
Y1=[f(x) for x in X1]
Y2=[f(x) for x in X2]
Y3=[f(x) for x in X3]
plt.plot(X1,Y1)
plt.plot(X2,Y2)
plt.plot(X3,Y3)
plt.show()
```

6) Traitée en cours.

7) Traitée en cours.

8) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. Il s'agit d'une fonction paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \iff \qquad e^x \underset{<}{>} e^{-x} \qquad \iff \qquad x \underset{<}{>} -x \qquad \iff \qquad x \underset{<}{>} 0$$

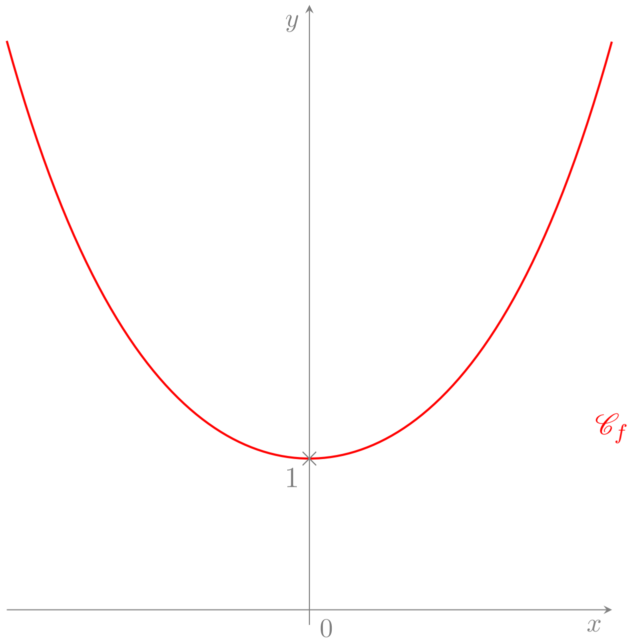
car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On l'a complété avec les limites : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

et par parité. D'où la courbe représentative :



On peut l'obtenir avec Python :

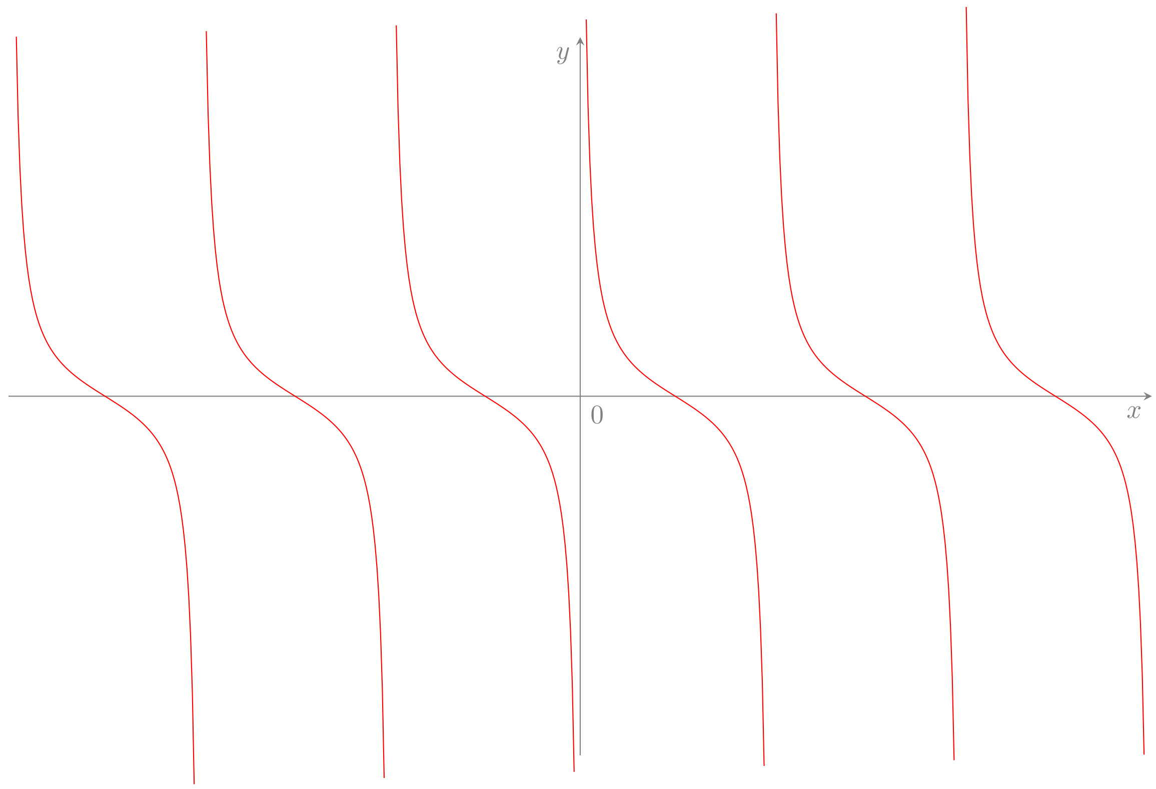
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    t=np.exp(x)
    return (t+1/t)/2

X=np.linspace(-4,4,10000)
Y=[f(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

9) Traitée en cours.

10) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et telles que la fonction du dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \qquad f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur tous les intervalles de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$. On remarque aussi que f est impaire et π-périodique, ce qui facilite le tracer :




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x) :
    return np.cos(x)/np.sin(x)

#On trace la courbe de f sur chaque intervalle ]k*pi;(k+1)*pi[
#Pour k valant -3,-2,-1,0,1,2
for k in range(-3,3):
    X=np.linspace(k*np.pi+0.01,(k+1)*np.pi-0.01,1000)
    Y=[f(x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)

plt.show()
```

Exercice 6. Donner l'équation de la droite (D) du plan passant par les points de coordonnées $(1, 5)$ et $(-3, 2)$. Donner l'équation de la droite (Δ) du plan de coefficient directeur $-1/2$ et passant par le point $(4, 6)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de (D) et (Δ).

Correction :

- La droite (D) admet pour équation $y = \dfrac{2-5}{-3-1}(x-1)+5 = \dfrac{3}{4}(x-1)+5 = \dfrac{3x}{4}+\dfrac{17}{4}$.
- La droite (Δ) admet pour équation $y = \dfrac{-1}{2}(x-4)+6 = -\dfrac{x}{2}+8$.
- (x, y) est un point d'intersection de (D) et (Δ) si et seulement si $y = \dfrac{3x}{4}+\dfrac{17}{4} = -\dfrac{x}{2}+8$ si et seulement si $y = -\dfrac{x}{2}+8$ et $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{2} = -\dfrac{17}{4}+8$ si et seulement si $y = -\dfrac{x}{2}+8$ et $3x+2x = -17+32$ si et seulement si $5x = 15$ et $y = -\dfrac{x}{2}+8$ si et seulement si $x = 3$ et $y = -\dfrac{3}{2}+8 = \dfrac{13}{2}$.
  Ainsi (D) et (Δ) ont pour intersection le point de coordonnées $(3, 13/2)$.

Exercice 7. Résoudre les équations ou inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, suivantes :

1) $|4-x|-|x+2|+|3x+5|=9$,
2) $2e^x-35e^{-x}=9$,
3) $2(\ln(x))^2=12+5\ln(x)$,
4) $|x+3|+|1-3x|>-2$,
5) $\ln(-x-3)-\ln(x-5)+\ln(x+4)\geqslant 0$,
6) $\ln(-x-3)\geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.

Correction :

1) On fait 4 cas selon que $x<-2$, $-2\leqslant x<-5/3$, $-5/3\leqslant x<4$ et $4\leqslant x$.

- Si $x<-2$, alors

$$|4-x|-|x+2|+|3x+5|=9 \iff 4-x+x+2-3x-5=9 \iff x=-\frac{8}{3}.$$

On vérifie que $-8/3<-2$.

- Si $-2\leqslant x<-5/3$, alors

$$|4-x|-|x+2|+|3x+5|=9 \iff 4-x-x-2-3x-5=9 \iff x=-\frac{12}{5}.$$

Il est faux que $-2\leqslant -12/5<-5/3$.

- Si $-5/3\leqslant x<4$, alors

$$|4-x|-|x+2|+|3x+5|=9 \iff 4-x-x-2+3x+5=9 \iff x=2.$$

On vérifie que $-5/3\leqslant 2<4$.

- Si $4\leqslant x$, alors

$$|4-x|-|x+2|+|3x+5|=9 \iff x-4-x-2+3x+5=9 \iff x=10/3.$$

Il est faux que $10/3<4$.

Ainsi il y a deux solutions : $-8/3$ et 2.

2) Un grand classique. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$2e^x-35e^{-x}=9 \iff e^x(2e^x-35e^{-x})=9e^x \iff 2(e^x)^2-9e^x-35=0.$$

Le trinôme $2X^2-9X-35$ admet pour discriminant $(-9)^2+4\times 2\times 35=361=19^2$ donc il admet deux racines : $\dfrac{9+19}{4}=7$ et $\dfrac{9-19}{4}=-5/2$. On a donc

$$2e^x-35e^{-x}=9 \iff \left(e^x=7 \quad \text{ou} \quad e^x=-5/2\right) \iff e^x=7 \iff x=\ln(7).$$

Ainsi $\ln(7)$ est l'unique solution.

3) Le trinôme $2X^2-5X-12$ admet $121=11^2$ pour discriminant donc il admet deux racines : $\dfrac{5+11}{4}=4$ et $\dfrac{5-11}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ (sinon l'équation n'a pas de sens). On a

$$2(\ln(x))^2=12+5\ln(x) \iff \ln(x)=4 \quad \text{ou} \quad \ln(x)=\frac{3}{2} \iff x=e^4 \quad \text{ou} \quad x=e^{3/2},$$

Ainsi il y a deux solutions : e^4 et $e^{3/2}$.

4) Une somme de valeurs absolues est positive donc strictement supérieure à 2. Ainsi tout réel est solution de cette inéquation.

Pour illustrer la méthode avec les cas, considérons l'inéquation alternative, $|x+3|-|1-3x|>-2$. Faisons trois cas :

- *Si* $x \in]-\infty, -3[$, $|x+3| - |1-3x| = -x-3-(1-3x) = 2x-4$ *et* $2x-4 > -2$ *si et seulement si* $x > 1$. *Ce n'est pas le cas !*
- *Si* $x \in [-3, 1/3[$, $|x+3| - |1-3x| = x+3-(1-3x) = 4x-2$ *et* $4x-2 > -2$ *si et seulement si* $x > -1$. *C'est le cas !*
- *Si* $x \in [1/3, +\infty[$, $|x+3| - |1-3x| = x+3-(3x+1) = -2x+4 > -2$ *si et seulement si* $3 > x$. *C'est le cas !*

Ainsi l'ensemble des solutions est $]-1\,;3[$.

5) Pour qu'un réel x soit solution de l'inéquation, il faut déjà que $-x-3 > 0$, $x-5 > 0$ et $x+4 > 0$ afin que les trois logarithmes soient bien définis. Il faut donc que $x < -3$, $x > 5$ et $x > -4$. Cette condition n'est vérifiée par aucun réel x. Par conséquent l'inéquation n'admet aucune solution.

6) Pour que l'inéquation, ait un sens, il faut et il suffit que $-x-3 > 0$, $x+4 \neq 0$ et $\dfrac{x-5}{x+4} > 0$ afin que les deux logarithmes soient bien définis. Ces conditions sont équivalentes $x < -3$ et $x \in]-\infty, -4[\cup]5, +\infty[$, c'est-à-dire à $x \in]-\infty, -4[$.

Donnons-nous $x \in]-\infty, -4[$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\frac{x-5}{x+4}\right) \quad &\iff \quad -x-3 \geqslant \frac{x-5}{x+4} \\
&\iff \quad (-x-3)(x+4) \leqslant x-5 \\
&\iff \quad -x^2-7x-12 \leqslant x-5 \\
&\iff \quad x^2+8x+7 \geqslant 0 \\
&\iff \quad (x-7)(x-1) \geqslant 0 \\
&\iff \quad x-7 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

A la première équivalence, on a utilisé le fait que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A la deuxième, on a utilisé le fait que $x+4 < 0$. A la dernière, on a utilisé le fait que $x-1 < 0$.

Finalement nous obtenons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, 7[$.

Exercice 8. Résoudre les inéquations, d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $2^n \geqslant 1000000$, 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \geqslant \frac{7}{2}$, 3) $\dfrac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2)$

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\pi/4 \in]0, 1[$, on a $\ln(\pi/4) < 0$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2) \quad &\iff \quad \frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} \leqslant 3\ln(2) - \ln(5) \\
&\iff \quad \ln(2n) \geqslant \big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4) \\
&\iff \quad n \geqslant \frac{1}{2}\exp\Big(\big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4)\Big),
\end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que

$$\frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2) \quad \iff \quad n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}\exp\Big(\big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4)\Big) \right\rfloor + 1.$$

Exercice 10. Montrer que

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.

2) Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

4) Pour tout $x \in \left[0\,;-\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.

Correction :

1) Traitée en cours (dans le chapitre 6).

2) On pose $f : x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x) - x$. Elle est définie et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0.$$

Ainsi f est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Cela signifie que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad |\tan(x)| = \tan(x) \geqslant x = |x|.$$

Et si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, on a $-x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$|\tan(x)| = |\tan(-x)| \geqslant |-x| = |x|.$$

3) • On pose $f : x \longmapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

La fonction f' est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f''(x) = -\sin(x) + x.$$

La fonction f'' est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'''(x) = -\cos(x) + 1 \geqslant 0.$$

Ainsi f'' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f''(0) = 0$, f'' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f'(0) = 0$, f' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin $f(0) = 0$ et donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x).$$

• On pose $g : x \longmapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}.$$

La fonction g' est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g''(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{3!} = -f(x) \leqslant 0.$$

Ainsi g' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g'(0) = 0$, g' est négative sur $\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin $g(0) = 0$ et donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

4) Traitée en cours.

Exercice 11. Montrer que chacune des fonctions suivantes est périodique sur son domaine de définition.

1) $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$, 2) $x \longmapsto \sin(7+6x)$, 3) $x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, 4) $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{2x}{43}\right) + \sin\left(\dfrac{2x}{47}\right)$.

Correction :

1) Posons $f : x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et $f(x+1) = x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$. Ainsi f est 1-périodique.

2) Posons $f : x \longmapsto \sin(7+6x)$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche $T > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(7+6(x+T)) = \sin(7+6x).$$
Il suffit que $6T = 2\pi$, i.e. $T = \pi/3$.
Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$. Ainsi f est $\pi/3$ périodique.

3) Posons $f : x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Elle est définie en tout point x tel que $\sin(x/2) \neq 0$, i.e $\dfrac{x}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$, i.e. $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{5T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
Il suffit que $5T/2$ et $T/2$ soient des multiples de 2π. Par exemple $T = 4\pi$ contient.
Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $x + 4\pi \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi f est 4π-périodique.
On peut faire mieux : f est même 2π-périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et
$$f(x+2\pi) = \frac{\sin\left(\frac{5x}{2} + 5\pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = f(x).$$

4) Posons $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{2x}{43}\right) + \sin\left(\dfrac{2x}{47}\right)$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche $T > 0$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos\left(\frac{2x}{43} + \frac{2T}{43}\right) + \sin\left(\frac{2x}{47} + \frac{2T}{47}\right) = f(x+T) = f(x) = \cos\left(\frac{2x}{43}\right) + \sin\left(\frac{2x}{47}\right).$$
Il suffit que $\dfrac{2T}{43}$ et $\dfrac{2T}{47}$ soient des multiples de 2π, i.e. que T soit un multiple de 43π et de 47π. Comme 43 et 47 sont premiers entre eux. On en déduit que $T = \dfrac{\pi}{43 \times 47} = \dfrac{\pi}{2021}$ convient.

Exercice 12. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$.

1) Montrer que, si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
2) Montrer que, si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Correction :

1) Supposons que f et g sont croissantes. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \leqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.

Supposons que f et g sont décroissantes. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \geqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.

2) Supposons que f est croissante et g décroissante. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \leqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est décroissante.

Supposons que f est décroissante et g croissante. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \geqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est décroissante.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f \circ f$ est croissante et la fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. En raisonnant par l'absurde, montrer que f est strictement décroissante.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement décroissante. Il existe donc x et y deux réels tels que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$. Comme $f \circ f$ est croissante, il vient que $(f \circ f)(f(x)) \leqslant (f \circ f)(f(y))$, i.e. $f \circ f \circ f(x) \leqslant f \circ f \circ f(y)$. Cela contredit le fait que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Ainsi f est strictement décroissante.

Exercice 14. Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$). Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f + g$ et fg ?

Correction :

- Supposons que f et g sont toutes les deux paires. Soit $x \in I$. On a alors
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$
et
$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$
Ainsi $f + g$ et fg sont paires.
- Supposons que f et g sont toutes les deux impaires. Soit $x \in I$. On a alors
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$$
et
$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = \big(-f(x)\big)\big(-g(x)\big) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$
Ainsi $f + g$ est impaire et fg est paire.
- Supposons que f est paire et g impaire (ou le contraire : ça ne change rien puisque les rôles de f et g sont symétriques dans $f + g$ et fg). Soit $x \in I$. On a alors
$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)\big(-g(x)\big) = f(x)g(x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$
Ainsi fg est impaire. Par contre on ne peut rien conclure quant à la parité de $f + g$ en général. En effet :
  — Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x$, alors $f + g$ n'est ni paire ni impaire.
  — Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 0$, alors $f + g$ est paire.
  — Si $f : x \longmapsto 0$ et $g : x \longmapsto x$, alors $f + g$ est impaire.

Exercice 15. Soient f et g deux fonctions bornées[1] sur un intervalle A. Montrer que $f + g$ est bornée sur A et que
$$\sup_A |f + g| \leqslant \sup_A |f| + \sup_A |g|.$$
Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Correction :

- Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in A$, on a $|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_A |f| + \sup_A |g|$. Ainsi $f + g$ est bornée sur A. Comme $\sup\limits_A |f| + \sup\limits_A |g|$ est un majorant de $|f + g|$, on en déduit que $\sup\limits_A |f + g| \leqslant \sup\limits_A |f| + \sup\limits_A |g|$.

1. Si h est une fonction bornée sur $A \subset \mathbb{R}$, on note $\sup\limits_A |h|$ la borne supérieure de la partie non vide majorée $\big\{|h(x)| \,\big|\, x \in A\big\}$.

- Il n'y a pas égalité en général. Par exemple $\sup_{\mathbb{R}} |\cos| + \sup_{\mathbb{R}} |\sin| = 1 + 1 = 2$ alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) = \cos(x) + \cos(\pi/2 - x) &= 2\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\sup_{\mathbb{R}} |\cos + \sin| = \sqrt{2} < 2$.

Exercice 16. Soit f une fonction croissante sur $[0\,;1]$ et à valeurs dans $[0\,;1]$.

1) Montrer que $A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) \geqslant x\}$ possède une borne supérieure a.
2) Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. Que peut-on en déduire ?
3) Montrer que $f(a) \in A$ et conclure que $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f.
4) Est-ce qu'une fonction décroissante admet forcément un point fixe ?

Correction : A VENIR

Exercice 17. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est à la fois monotone et périodique ?

Correction : A VENIR