Correction de quelques exercices de la feuille de TD 5

Exercice 1 (Formules de trigonométrie). Soient a et b deux réels. Montrer les formules de trigonométrie[1] suivantes :

1) Formules de soustraction :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

2) Formules de duplication :

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a), \qquad \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a).$$

3) Formules de linéarisation :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right), \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right), \qquad \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}, \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

4) Formules de factorisation :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \qquad \cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

5) Quelques relations entre les angles (faites un dessin) :

$$\cos(a+\pi) = -\cos(a), \qquad \sin(a+\pi) = -\sin(a), \qquad \cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a), \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a).$$

⚠ *Les formules de cet exercice ne sont pas à connaître par cœur. Cependant elles sont très utiles en pratique et leurs démonstrations feront l'objet de questions récurrentes dans les sujets de concours, préliminaires à d'autres questions. Bref : il faut à tout prix savoir les redémontrer.*

Correction :

1) On utilise le fait que $\sin(-b) = -\sin(b)$ et $\cos(-b) = \cos(b)$:
   - $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
   - $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.
2)
   - $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\cos(a)\sin(a)$.
   - $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
   Ensuite on utilise le fait que $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$: $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.
   Ensuite on utilise le fait que $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$: $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

[1]. On utilisera uniquement les formules du cours : $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, les angles remarquables et les considérations géométriques classiques : $\cos(-a) = \cos(a)$, $\sin(-a) = -\sin(a)$, $\cos(a+2\pi) = \cos(a)$, $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$.

3) On part du terme de droite :

- $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a)\cos(b).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)-\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\sin(a)\sin(b) = \sin(a)\sin(b).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\right)\\ &= \frac{1}{2}\times 2\sin(a)\cos(b) = \sin(a)\cos(b).\end{aligned}$$
- $$\frac{\cos(2a)+1}{2} = \frac{\cos(a+a)+1}{2} = \frac{\cos^2(a)-\sin^2(a)+1}{2} = \frac{\cos^2(a)+\cos^2(a)}{2} = \cos^2(a).$$
- $$\frac{1-\cos(2a)}{2} = \frac{1-\cos(a+a)}{2} = \frac{1-\cos^2(a)+\sin^2(a)}{2} = \frac{\sin^2(a)+\sin^2(a)}{2} = \sin^2(a).$$

4) On remarque que $a = \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a-b}{2}$ et $b = \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a-b}{2}$:

- $$\begin{aligned}\cos(a)+\cos(b) &= \cos\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &\quad+\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\cos(a)-\cos(b) &= \cos\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)-\cos\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &\quad-\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sin(a)+\sin(b) &= \sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)+\sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &\quad+\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).\end{aligned}$$

- $\sin(a)-\sin(b) = \sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&\quad - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).
\end{aligned}$$

5)
- $\cos(a+\pi) = \cos(a)\cos(\pi) - \sin(a)\sin(\pi) = \cos(a)\times(-1) - \sin(a)\times 0 = -\cos(a)$.
- $\sin(a+\pi) = \sin(a)\cos(\pi) + \cos(a)\sin(\pi) = \sin(a)\times(-1) - \cos(a)\times 0 = -\sin(a)$.
- $\cos(\pi-a) = \cos(\pi)\cos(a) + \sin(\pi)\sin(a) = (-1)\times\cos(a) + 0\times\sin(a) = -\cos(a)$.
- $\sin(\pi-a) = \sin(\pi)\cos(a) - \cos(\pi)\sin(a) = 0\times\cos(a) - (-1)\times\sin(a) = \sin(a)$.
- $\cos(\pi/2-a) = \cos(\pi/2)\cos(a) + \sin(\pi/2)\sin(a) = 0\times\cos(a) + 1\times\sin(a) = \sin(a)$.
- $\sin(\pi/2-a) = \sin(\pi/2)\cos(a) - \cos(\pi/2)\sin(a) = 1\times\cos(a) - 0\times\sin(a) = \cos(a)$.

Exercice 2. Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.

Correction : Soit $a\in\mathbb{R}$. En utilisant plusieurs fois les formules d'addition du sinus et du cosinus :

$$\begin{aligned}
\sin(3a) = \sin(a+2a) &= \sin(a)\cos(2a) + \cos(a)\sin(2a) \\
&= \sin(a)\cos(a+a) - \cos(a)\sin(a+a) \\
&= \sin(a)(\cos^2(a) - \sin^2(a)) + \cos(a)(\sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a)) \\
&= \sin(a)\cos^2(a) - \sin^3(a) + 2\cos^2(a)\sin(a) \\
&= -\sin^3(a) + 3\cos^2(a)\sin(a).
\end{aligned}$$

On utilise alors le fait que $\cos^2(a) = 1-\sin^2(a)$:

$$\sin(3a) = -\sin^3(a) + 3\sin(a) - 3\sin^3(a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a).$$

Exercice 3. Donner une valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right),\quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right),\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\quad \text{et}\quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Correction :

- Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

- Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

- Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 4. A l'aide des formules de trigonométrie de l'exercice 1, résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $2\cos(4x+\pi) = 1$,
2) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$,
3) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0$,
4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3}\sin(5x)$,
5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$,
6) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}$.
7) $2\sin(x) \leqslant -1$.
8) $\sin^2(x) + 3\cos(x) < 1$.

Pour les questions 7 et 8, on pourra s'aider d'un dessin. Mais, pour justifier correctement, on se ramènera à des cas de positivité de cosinus ou sinus.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin(2x)+\sin(6x) = 0 \quad &\iff \quad \sin(2x) = -\sin(6x) \\
&\iff \quad \sin(2x) = \sin(-6x) \\
&\iff \quad 2x \equiv -6x\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi + 6x\,[2\pi] \\
&\iff \quad 8x \equiv 0\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad -4x \equiv \pi\,[2\pi] \\
&\iff \quad x \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

(modulo $-\pi/2$, c'est la même chose que modulo $\pi/2$). On remarque que tout réel congru à $-\frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{\pi}{2}$ est aussi congru à 0 modulo $\frac{\pi}{4}$. Ainsi $\sin(2x)+\sin(6x) = 0$ si et seulement si x est à 0 modulo $\frac{\pi}{4}$.

4) Traitée en cours.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x) \quad &\iff \quad -2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-2x}{2}\right) = \sin(3x) \\
&\iff \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(3x) \\
&\iff \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(2\,\frac{3x}{2}\right) \\
&\iff \quad 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) \\
&\iff \quad \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \\
&\iff \quad \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \\
&\iff \quad \frac{3x}{2} \equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi - x}{2} \equiv 3x\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{\pi - x}{2} \equiv -3x\,[2\pi] \\
&\iff \quad x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad \pi \equiv 7x\,[4\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -5\pi\,[4\pi] \\
&\iff \quad x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{7}\left[\frac{4\pi}{7}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{5}\left[\frac{4\pi}{5}\right]
\end{aligned}$$

6) Traitée en cours.

7) Traitée en cours.

8) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + 3\cos(x) < 1 \quad &\iff \quad 1 - \cos^2(x) + 3\cos(x) < 1 \\
&\iff \quad \cos(x)(3 - \cos(x)) < 0 \\
&\iff \quad \cos(x) < 0 \\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soient a et b deux réels qui ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π et leur somme non plus. Montrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Correction : Soient a et b deux réels tels que a, b et $a+b$ n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. On a

$$1 - \tan(a)\tan(b) = \frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}.$$

Ce terme est non nul donc on peut diviser :

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a+b)}\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right) \\
&= \frac{1}{\cos(a+b)}(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) \\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \tan(a+b).
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Somme de cosinus et sinus). Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

1) Calculer C_n et S_n lorsque x est congru à 0 modulo 2π

2) Supposons que x n'est pas congru à 0 modulo 2π.

   a) À l'aide d'une formule de linéarisation (cf. exercice 1) et d'une somme télescopique, montrer que

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) C_n = \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) S_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$$

   b) À l'aide d'une formule de factorisation (cf. exercice 1), en déduire que

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3) a) Une application : Simplifier la fraction

$$\frac{\sin(3\theta) + \sin(6\theta) + \sin(9\theta)}{1 + \cos(3\theta) + \cos(6\theta) + \cos(9\theta)}$$

   lorsque $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que le dénominateur est non nul.

   b) Une autre application : Pour tout x n'étant pas congru à 0 modulo 2π, déterminer un réel M (dépendant de x mais pas de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \leqslant M.$$

Correction :

1) Traitée en cours.

2) a) • Traitée en cours pour la première.

   • Pour la deuxième :

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) S_n = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(kx) = \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{2} - kx\right) - \cos\left(kx + \frac{x}{2}\right)\right),$$

   par formule de linéarisation. Pour le premier terme, utilisons la parité du cosinus et remarquons que c'est une somme télescopique :

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(kx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(kx + \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left((k+1) - \frac{1}{2}\right)x\right)\right) \\ &= \cos\left(\left(0 - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + 1 - \frac{1}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

   et donc

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) S_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right).$$

b) • Puisque $\frac{x}{2}$ n'est pas congru à 0 modulo π, on peut diviser par $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Utilisons la formule de factorisation $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)$ avec $a = \frac{(2n+1)}{2}x$ et $b = \frac{x}{2}$ (et donc $\frac{a+b}{2} = \frac{(n+1)x}{2}$ et $\frac{a-b}{2} = \frac{nx}{2}$) :

$$C_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

• Puisque $\frac{x}{2}$ n'est pas congru à 0 modulo π, on peut diviser par $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$S_n = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Utilisons la formule de factorisation $\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$ avec $a = \frac{x}{2}$ et $b = \frac{(2n+1)}{2}x$ (et donc $\frac{a+b}{2} = \frac{(2n+1)x}{2}$ et $\frac{b-a}{2} = \frac{nx}{2}$:

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'un côté :

$$\sin(3\theta) + \sin(6\theta) + \sin(9\theta) = \sum_{k=0}^{3} \sin(k \times 3\theta) = S_3,$$

lorsque $x = 3\theta$. De l'autre :

$$1 + \cos(3\theta) + \cos(6\theta) + \cos(9\theta) = \sum_{k=0}^{3} \cos(k \times 3\theta) = C_3.$$

• Si 3θ est congru à 0 modulo 2π, on a $S_3 = 0$ et $C_3 = 4$ donc le quotient existe est il est nul.

• Si 3θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, on a

$$C_3 = \frac{\sin\left(\frac{(3+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin(6\theta)\cos\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}$$

et

$$S_3 = \frac{\sin\left(\frac{(3+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin(6\theta)\sin\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}$$

Pour pouvoir diviser par C_3, il faut et il suffit que $\sin(6\theta)\cos\left(\dfrac{9\theta}{2}\right)$ soit non nul. Or on a

$$\begin{aligned}
\sin(6\theta)\cos\left(\frac{9\theta}{2}\right)=0 \quad &\iff \quad \sin(6\theta)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{9\theta}{2}\right)=0\\
&\iff \quad \sin(6\theta)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{9\theta}{2}\right)=0\\
&\iff \quad 6\theta\equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{9\theta}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\,[\pi]\\
&\iff \quad \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{6}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{9}\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, si θ n'est congru ni à 0 modulo $\dfrac{\pi}{6}$ ni à $\dfrac{\pi}{9}$ modulo $\dfrac{2\pi}{9}$, alors on peut former le quotient et

$$\frac{\sin(3\theta)+\sin(6\theta)+\sin(9\theta)}{1+\cos(3\theta)+\cos(6\theta)+\cos(9\theta)}=\frac{S_3}{C_3}=\frac{\sin\left(\dfrac{9\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{9\theta}{2}\right)}=\tan\left(\frac{9\theta}{2}\right).$$

4) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right|=\frac{\left|\sin\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\right|\times\left|\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|}.$$

Puisque $\sin$ est borné par 1, on obtient :

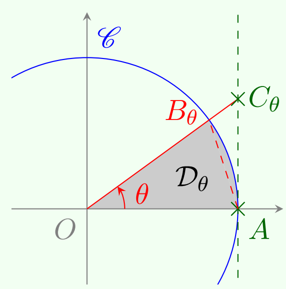
$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right|\leqslant\frac{1\times 1}{\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|}.$$

⚠ *On ne majore surtout pas le tout par 1. Puisque le terme du dénominateur est majoré par 1, son inverse est MINORÉ par 1 et donc on ne peut rien conclure... mais peu importe puisque c'est déjà fini.*

Ainsi, en posant $M=\dfrac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|}$, qui est bien indépendant de n, on a fini.

Exercice 7. Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ le disque (d'aire π) dont il est la frontière. Soit A le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1,0)$. Fixons $\theta\in\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et notons

- B_θ le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_\theta})=\theta$.
- C_θ le point d'intersection de la droite $(0B_\theta)$ avec la droite d'équation $x=1$.
- $\mathcal{D}_\theta$ le secteur angulaire délimité par $\mathscr{C}$ et par les deux rayons $[OA]$ et $[OB_\theta]$.



1) Sachant que l'aire de $\mathcal{D}_\theta$ est proportionnelle à l'angle θ, calculer son aire.

2) Calculer l'aire des triangles AOB_θ et AOC_θ.

3) En remarquant que $AOB_\theta\subset\mathcal{D}_\theta\subset AOC_\theta$, en déduire que

$$\theta\cos(\theta)\leqslant\sin(\theta)\leqslant\theta.$$

Quelques remarques :

- *L'inégalité de droite pouvait s'obtenir plus simplement en remarquant que la longueur du segment $[AB_0]$ (qui est égale à θ) est nécessairement plus grande que la distance du point B_0 à la droite (OA_θ) (qui est égale à $\sin(\theta)$).*
- *Il est plus usuel d'obtenir ces inégalités classiques à l'aide d'études de fonctions (cf. chapitre suivant).*

- *Pour tout* $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\theta) \leqslant \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1$ *donc, par théorème d'encadrement,* $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$ *(cf. chapitres 13 et 15).*

Correction :

1) D'après l'énoncé, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}_\theta = \lambda\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Puisque le périmètre de $\mathscr{C}$ est égal à 2π et son aire à π, on a $\pi = \mathcal{D}_\pi = \lambda 2\pi$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
2) L'aire du triangle AOB_θ est $\dfrac{1 \times \sin(\theta)}{2}$ et l'aide du triangle AOC_θ est $\dfrac{1 \times \tan(\theta)}{2}$.
3) L'aire de la portion de disque d'angle θ (la zone en gris) est alors $\theta/2$ et elle est comprise entre l'aire du triangle AOB_θ et l'aire du triangle AOC_θ. C'est-à-dire

$$\frac{\sin(\theta)}{2} \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Comme $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(\theta) > 0$ et $\cos(\theta) > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc

$$\frac{2}{\tan(\theta)} \leqslant \frac{2}{\theta} \leqslant \frac{2}{\sin(\theta)}$$

puis

$$\cos(\theta) \leqslant \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1.$$

et donc

$$\theta\cos(\theta) \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$