Correction de quelques exercices de la feuille de TD 4

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$. Calculer les sommes $\sum_{k=p}^{n} k$ et $\sum_{k=p}^{n} x^k$.

Correction : La relation de Chasles entraîne que

$$\sum_{k=p}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{p-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2}$$

et, si $x \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{p-1} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1-x^p}{1-x} = \frac{x^p - x^{n+1}}{1-x} = x^p\,\frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}.$$

Si $x=1$, alors $\sum_{k=p}^{n} x^k = n-p+1.$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme P_n des entiers pairs de 0 à $2n$ et la somme I_n des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Correction :

- La somme des entiers pairs de 0 à $2n$ est

$$\sum_{k=0}^{n} 2k = 2\sum_{k=0}^{2n} k = 2\,\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

- La somme des entiers pairs de 1 à $2n+1$ est

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = n(n+1) + n + 1 = (n+1)^2.$$

Exercice 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

⚠ *Ces deux formules ne sont pas à connaître par cœur. Cependant elles sont très utiles en pratique et leurs démonstrations feront l'objet de questions récurrentes dans les sujets de concours, préliminaires à d'autres questions. Bref : il faut à tout prix savoir les redémontrer.*

Correction : Fait en cours.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=n}^{3n+1} 2^{i+1}, \quad \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2^j}, \quad \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2}, \quad \sum_{j=0}^{2n} \frac{7^j - 2\cdot 3^{2j}}{5^j}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln(k), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (n\ell - 1), \quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=2}^{n} k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}.$$

Pour la dernière somme, on utilisera l'exercice 5 du TD n° 2.

Correction : Toutes ont été traitées en cours sauf la dernière. Dans l'exercice 4 du TD n° 2, nous avons vu que si x et y sont des réels positifs tels que $y \leqslant x^2$, alors

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, en appliquant ce résultat avec $x = k$ et $y = k^2 - 1$, on a

$$\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}} = \sqrt{\frac{k+\sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{k-\sqrt{1}}{2}} = \sqrt{\frac{k+1}{2}} + \sqrt{\frac{k-1}{2}}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{(k+1)-(k-1)} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) - \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\sqrt{n+1}-\sqrt{1}) - (\sqrt{0}-\sqrt{n})\right) \\
&= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 7.

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1} + \dfrac{\beta}{k+3}$.

2) En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1) Soient α et β des réels et $k \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k+3} = \frac{\alpha(k+3)+\beta(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{(\alpha+\beta)k + (3\alpha+\beta)}{(k+1)(k+3)}.$$

Il suffit que $\alpha + \beta = 0$ et $3\alpha + \beta = 1$ pour que $\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k+3}$ quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$. On trouve $\alpha = -\beta = \dfrac{1}{2}$ conviennent.

2) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}.$$

Faisons les changements d'indice $j=k+1$ dans la première somme et $j=k+3$ dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+3}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Correction : On raisonne par récurrence.... ou on sépare selon la parité :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

De même

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+5}{2k+7}, \qquad \prod_{i=1}^{n}2^{1-i^2}, \qquad \prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Correction :

- Traitée en cours.
- Traitée en cours.
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{k+1}{k} = \frac{2-1}{n+1}\times\frac{n+1+1}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$
- Passons au logarithme (tous les termes du produit étant strictement positifs) :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(k\ln(k+1) - k\ln(k)\right).$$

On utilise l'astuce du « +1–1 » pour se ramener à une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big(k\ln(k+1) - k\ln(k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((k{\color{red}+1})\ln(k+1) {\color{red}-\ln(k+1)} - k\ln(k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)\Big) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&= (n+1)\ln(n+1) - 1\cdot\ln(1) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)\\
&= (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!),
\end{aligned}$$

où on a reconnu une somme télescopique pour passer de la deuxième à la troisième égalité. Enfin on passe à l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = \exp\big((n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)\big) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 11.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x^{2^k}+1) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$.

Correction :

1) Fixons $x \in \mathbb{R}\backslash 1$. Notons $P(n)$: « $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x^{2^k}+1) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{0}(x^{2^k}+1) = x^{2^0}+1 = x+1$ et $\displaystyle\frac{x^{2^{0+1}}-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x^{2^k}+1) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$
- Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Traitée en cours.

3) Notons $P(n)$: « $\displaystyle\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) = 1-\frac{2}{4\cdot 1+3} = \frac{5}{7}$ et $\displaystyle\frac{3}{7} < \frac{25}{49} < \frac{5}{9}$ donc

$$\sqrt{\frac{3}{4\cdot 1+3}} = \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{5}{7} < \sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{5}{4\cdot 1+5}}.$$

Ainsi $P(1)$ est vraie.

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}.$$

En multipliant par le réel strictement positif $\frac{4n+5}{4n+7} = 1 - \frac{2}{4(n+1)+3}$, on obtient

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}}\frac{4n+5}{4n+7} < \prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}\frac{4n+5}{4n+7}.$$

Pour que $P(n+1)$ est vraie, il suffit que

$$(1)\quad \sqrt{\frac{3}{4(n+1)+3}} \leqslant \sqrt{\frac{3}{4n+3}}\frac{4n+5}{4n+7} \qquad \text{et} \qquad (2)\quad \sqrt{\frac{5}{4n+5}}\frac{4n+5}{4n+7} \leqslant \sqrt{\frac{5}{4(n+1)+5}}$$

Est-ce le cas ? On vérifie... on a :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \sqrt{(4n+3)(4n+7)} \leqslant 4n+5 \\
&\iff \quad (4n+3)(4n+7) \leqslant (4n+5)^2 \\
&\iff \quad 16n^2+12n+28n+21 \leqslant 16n^2+40n+25 \quad \iff \quad 21 < 25,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\iff \quad \sqrt{(4n+5)(4n+9)} \leqslant 4n+7 \\
&\iff \quad (4n+5)(4n+9) \leqslant (4n+7)^2 \\
&\iff \quad 16n^2+20n+36n+45 \leqslant 16n^2+56n+49 \quad \iff \quad 45 < 49.
\end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels.

1) Déterminer le signe de trinôme du second degré $\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i| + X|y_i|\right)^2$ de deux façons différentes.

2) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

Correction :

1) Posons $P = \sum_{i=1}^{n}(|x_i| + X|y_i|)^2$. Développons :

$$P = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2X\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| + X^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré et son discriminant est

$$\Delta = \left(2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

Mais le trinôme P est toujours positif. Il ne peut pas avoir deux racines réelles distinctes. Son discriminant Δ est donc toujours négatif. Par conséquent

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)=\frac{\Delta}{4}\leqslant 0.$$

Il suffit de passer le deuxième terme de l'autre côté de l'inégalité et de prendre les racines de chaque côté (ce sont des nombres positifs) pour obtenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x_i=\dfrac{1}{i}$ et $y_i=i$ pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$:

$$n^2=\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

D'où la formule.

I Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Écrire, à l'aide de factorielles,

$$\prod_{i=0}^{n}(i+2),\qquad\prod_{j=1}^{n}(j-1),\qquad\prod_{k=1}^{n}(n+k),\qquad\prod_{\ell=1}^{n}\ell^2(\ell+1)^3.$$

Correction :

- On a $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(i+2)=(n+2)!$.
- On a $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(j-1)=0$.
- On fait le changement d'indice $j=n+k$:

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k)=\prod_{j=n+1}^{2n}j=\frac{\left(\displaystyle\prod_{j=n+1}^{2n}j\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n}j\right)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}j}=\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{2n}j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}j}=\frac{(2n)!}{n!}.$$

- On a

$$\prod_{\ell=1}^{n}\ell^2(\ell+1)^3=\left(\prod_{\ell=1}^{n}\ell\right)^2\left(\prod_{\ell=1}^{n}(\ell+1)\right)^3=(n!)^2((n+1)!)^3.$$

Exercice 15. Soient p et n deux entiers naturels tels que $p\leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Fixons $p\in\mathbb{N}$. Montrons la formule par récurrence sur $n\geqslant p$ (à p fixé donc).

- *Initialisation :* On a $\displaystyle\sum_{i=p}^{p}\binom{i}{p}=\binom{p}{p}=1=\binom{p+1}{p+1}$ donc la formule est vraie au rang p.

- *Hérédité :* Soit $n \geqslant p$. Supposons que la formule soit vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a
$$\sum_{i=p}^{n+1}\binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p},$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Or la formule du triangle de Pascal entraîne que
$$\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$
Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exercice 16. A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Correction : La formule du binôme de Newton entraîne que
$$10^n - 1 = (9+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}9^k - 1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}9^k = 9\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}9^{k-1}}_{\in\mathbb{N}}$$
est bien divisible par 9.

Exercice 17. Montrer de deux manières différentes que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Correction :

- *Méthode 1.* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n = 1 + \binom{n}{1}x^1 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^n = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^n}_{\geqslant 0}.$$
Ainsi $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
- *Méthode 2.* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $P(n)$: « $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par récurrence.
  — On a $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ donc $P(1)$ est vraie.
  — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Puisque $1 + x \geqslant 0$, on a donc
  $$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) \geqslant 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x.$$
  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
  — Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k}.$$

Correction :

- Traitée en cours.

- On a

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\underbrace{k\binom{n}{k}}_{n\binom{n-1}{k-1}}2^k = n\sum_{k=2}^{n}\underbrace{(k-1)\binom{n-1}{k-1}}_{(n-1)\binom{n-2}{k-2}}2^k.$$

On fait le changement d'indice $j = k-2$:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}2^k = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}2^{j+2}.$$

Enfin la formule du binôme de Newton entraîne que

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = 4n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}2^j 1^{n-2-j} = 4n(n-1)(2+1)^{n-2} = 4n(n-1)3^{n-2}.$$

- Traitée en cours.
- Si $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$. Supposons que $n \geqslant 2$. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j},$$

en faisant le changement d'indice $j = k-1$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j} - (-1)^n\binom{n-1}{n-1}\right) = n\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j} - (-1)^n\right).$$

La formule du binôme de Newton entraîne que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j} - (-1)^n\binom{n-1}{n-1}\right) = n\left((-1+1)^{n-1} - (-1)^n\right) = n(-1)^{n-1}.$$

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i, \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j^2, \qquad \sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} n^{p+q}, \qquad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j), \qquad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j), \qquad \sum_{(i,j)\in A_n}(i+j)$$

où $A_n = \{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 \mid k+\ell = n\}$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j^2 = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j^2\right) = \sum_{j=2}^{n}\left((j-1)j^2\right) = \sum_{j=1}^{n}\left((j-1)j^2\right) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n(n+1)}{12}(3n(n+1) - 2(2n+1))\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}\end{aligned}$$

3) On reconnaît la formule de développement/factorisation :

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} n^{p+q} = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} n^q\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)^2 = \left(n\,\frac{1-n^n}{1-n}\right)^2$$

4) D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n}1+\sum_{j=1}^{n}j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= n\sum_{i=1}^{n}i+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}1\\ &= n\,\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\,n = n^2(n+1).\end{aligned}$$

5) Traitée en cours.

6) Nous n'avons pas vu de formule dans le cours... mais ce n'est pas difficile. On remarque que l'ensemble A_n ne contient que n couples : $(1,n-1),(2,n-2),\ldots,(n-1,1)$. De plus, si (i,j) est l'un de ses couples, alors $i+j=n$. La somme consiste donc à sommer n fois n. Ainsi

$$\sum_{(i,j)\in A_n}(i+j) = n^2.$$

Exercice 22. Écrire une fonction en Python qui prend en argument deux entiers naturels n et p et qui renvoie la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^p$.

Correction : Cf. DM n° 2

Exercice 24 (Factorielles et coefficients binomiaux).

1) Écrire une fonction en Python qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie $n!$.
2) a) Écrire une fonction, utilisant la précédente, qui prend en argument deux entiers naturels n et p vérifiant $p\leqslant n$ et qui renvoie $\binom{n}{p}$.
   b) La tester avec $\binom{100000000}{2}$. Commenter.
   c) Écrire une fonction, qui prend en argument deux entiers naturels n et p vérifiant $p\leqslant n$ et qui, en utilisant un seul produit et aucune fonction factorielle, renvoie $\binom{n}{p}$. Recommencer alors la question précédente.
   d) Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie :
      - Un message d'erreur si n ou p n'est pas un entier naturel
      - 0 si n et p sont des entiers naturels tels que $p>n$.
   e) Proposer une version améliorée de la fonction précédente, qui utilise le fait que $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

Correction :

1)
```
def Facto(n):
    f=1
    for k in range(1,n+1):
        f=f*k
    return f
```

2) a)

```
def CoeffBinom_Naif(n,p):
    return Facto(n)/(Facto(p)*Facto(n-p))
```

b) `print(CoeffBinom_Naif(100000000,2))`

Que c'est long ! Il s'agit pourtant simplement de $\dfrac{100000000 * 100000001}{2} = 5000000050000000.$

c)

```
def CoeffBinom(n,p):
    c=1
    for k in range(p):
        c=c*(n-k)/(p-k)
    return c
```

`print(CoeffBinom(100000000,2))`

Très rapide !

d)

```
def CoeffBinom(n,p):
    if int(n)!=n or int(p)!=p or n<0 or p<0:
        print('erreur : n ou p n''est pas un entier naturel')
    elif p>n:
        return 0
    else:
        return np.prod([(n-k)/(p-k) for k in range(p)])
```

e)

```
def CoeffBinom_deluxe(n,p):
    if int(n)!=n or int(p)!=p or n<0 or p<0:
        print('erreur : n ou p n''est pas un entier naturel')
    elif p>n:
        return 0
    else:
        if p<=n/2:
            return np.prod([(n-k)/(p-k) for k in range(p)])
        else:
            p=n-p
            return np.prod([(n-k)/(p-k) for k in range(p)])
```