Correction de quelques exercices de la feuille de TD 2

Exercice 2. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
On utilisera, après l'avoir montré, le fait qu'un entier naturel et son carré ont la même parité.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On choisit p et q de telle sorte que cette fraction soit irréductible.

On a alors $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ et donc $p^2 = 2q^2$. Nous obtenons que p^2 est pair. Nous en déduisons que p est pair. Montrons ce dernier point par contraposée :

> *Si p n'est pas pair, alors p est impair et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$. Par conséquent $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. Par contraposée, si p^2 est pair, alors p aussi.*

Il existe alors $a \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2a$ si bien que $4a^4 = 2q^2$ et donc $q^2 = 2a^2$ est pair. De même nous en déduisons que q est pair. C'est absurde car p et q sont pairs tous les deux et la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible.
Nous en déduisons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Soient x et y des réels positifs tels que $y \leqslant x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}.$$

Correction : Déjà, puisque $x^2 \geqslant y$, $\sqrt{x^2 - y}$ est bien défini. De plus $x^2 - y \leqslant x^2$ donc $\sqrt{x^2 - y} \leqslant x$ et donc $\sqrt{\dfrac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$ est bien défini. Ensuite on a

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}\right)^2 &= \frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2} + 2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}}\sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2} \\
&= x + 2\sqrt{\frac{(x + \sqrt{x^2 - y})(x - \sqrt{x^2 - y})}{4}} \\
&= x + \sqrt{x^2 - (x^2 - y)} = x + \sqrt{y}.
\end{aligned}$$

Puisque tout est positif, on passe à la racine et on trouve le résultat.

Exercice 6. Simplifier les expressions suivantes (fractions irréductibles, puissances de nombres premiers) :

$$2^{n+1} - 2^n, \quad 3^n + 3^n + 3^n, \quad \left(5^{5^n}\right)^{5^n}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^4 + 4} + \sqrt{x^4 + 3}}, \quad \sqrt{2 + \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}},$$

avec n un entier naturel et x, y des réels tels que $0 < y \leqslant |x|$.

Correction :

- $2^{n+1} - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$.
- $3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$.
- $\left(5^{5^n}\right)^{5^n} = 5^{5^n \cdot 5^n} = 5^{5^{2n}}$.

- $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}} = \dfrac{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}}{(x^4+4)-(x^4+3)} = \sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}$.
- Comme $y \leqslant |x|$, alors $x^2-y^2 \geqslant 0$ donc $\sqrt{x^2-y^2}$ est bien définie. Si $y > 0$, alors $x^2 > x^2-y^2$ donc $|x| > \sqrt{x^2-y^2}$. En particulier $x-\sqrt{x^2-y^2} \neq 0$ et $x+\sqrt{x^2-y^2} \neq 0$.

  L'expression $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$ est donc bien définie.

  Pour la simplifier, on multiplie chaque membre par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})^2}{x^2-(x^2-y^2)} + \frac{(x-\sqrt{x^2-y^2})^2}{x^2-(x^2-y^2)} = \frac{4x^2-2y^2}{y^2} = \frac{4x^2}{y^2} - 2.$$

  Et donc

$$\sqrt{2+\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}} = \frac{2|x|}{y}.$$

Exercice 7. Posons $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

1) Vérifier que $x^3+3x-14=0$.
2) Déterminer un trinôme du second degré P tel que $x^3+3x-14=(x-2)P(x)$.
3) En déduire que $x=2$.

Correction :

1) On a $x=a-b$ avec $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$ et $b=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. On a

$$x^3+3x-14 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3(a-b)-14.$$

   On a $a^3=5\sqrt{2}+7$, $b^3=5\sqrt{2}-7$ donc $a^3-b^3=14$. Par conséquent

$$x^3+3x-14 = -3a^2b+3ab^2+3(a-b) = 3(ab^2-a^2b+a-b) = 3(ab(b-a)+a-b) = 3(a-b)(1-ab).$$

   Enfin

$$ab = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)} = \sqrt[3]{50-49} = 1.$$

   On obtient bien $x^3+3x-14=0$.

2) *Au brouillon : on cherche a, b, c réels tels que $x^3+3x-14=(x-2)(ax^2+bx+c)$. Si on développe le terme de droite, on obtient :*

$$(x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+c-2ax^2-2bx-2c = ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$$

   Il faudrait donc que $2c=14$ (donc $c=7$), que $a=1$, que $b-2a=0$ (donc $b=2$) et que $c-2b=3$ (donc $c=3+2b=7$).

   On vérifie que

$$(x-2)(x^2+2x+7) = x^3+2x^2+7x-2x^2-4x-14 = x^3+3x-14.$$

   donc $P(x)=x^2+2x+7$ convient.

3) Ce trinôme n'admet pas de racine puisque son discriminant est $4-4\times 7=-21<0$. Ainsi $x^2+2x+7 \neq 0$ et donc $x-2=0$. On obtient bien que $x=2$.

Exercice 9. Soient x, y et z des nombres réels.

1) Étudier le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité triangulaire renversée.
2) Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
3) Montrer que $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
4) Supposons que $x>0$ et $y>0$. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$ avec égalité si et seulement si $x=y$.

Correction : Soient x et y des nombres réels.

1) Si $|x+y| = |x|+|y|$, alors $(x+y)^2 = (|x|+|y|)^2$ et donc

$$x^2+y^2+2xy = |x|^2+|y|^2+2|x|\,|y| = x^2+x^2+2|xy|.$$

Nous en déduisons que $xy = |xy|$ et donc que $xy \in \mathbb{R}_+$. Cela signifie que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x+y| = |x|+|y|$ ait lieu.
Si $|x-y| = ||x|-|y||$, alors $(x-y)^2 = (|x|-|y|)^2$ et donc

$$x^2+y^2-2xy = |x|^2+|y|^2-2|x|\,|y| = x^2+x^2-2|xy|.$$

Nous en déduisons que $xy = |xy|$ et donc que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x-y| = ||x|-|y||$ ait lieu.

2) On a $\dfrac{x^2+x^2}{2} - xy = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $\dfrac{x^2+x^2}{2} = xy$ si et seulement si $\dfrac{(x-y)^2}{2} = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x=y$.

3) On a $2(x^2+x^2)-(x+y)^2 = 2x^2+2y^2-x^2-y^2-2xy = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $2(x^2+x^2) = (x+y)^2$ si et seulement si $(x-y)^2 = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x=y$.

4) Réflexe : on passe tout de l'autre côté.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geqslant 0.$$

Ainsi $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$ avec égalité si et seulement si $x=y$.

Exercice 10. Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2+bx+c<0$?

Correction : Notons $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
On a $ax^2+bx+c<0$ si et seulement si l'une des quatre hypothèses suivantes est remplie :

- $\Delta < 0$ et $a<0$.
- $\Delta = 0$, $a<0$ et $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$, $a<0$ et $x \in \left]-\infty, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right[\cup \left]\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right[$.
- $\Delta > 0$, $a>0$ et $x \in \left]\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right[$.

Exercice 12.

1) Soient a, b, c et x des réels. Développer $(a+b+c)^2$ et $(ax^2+bx+c)^2$.
2) Application : montrer que, si n est le produit de quatre entiers naturels consécutifs, alors $n+1$ est le carré d'un entier.

Correction :

1) On a $(a+b+c)^2 = a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$. En remplace a par ax^2, b par bx et on

$$= a^2+ab+ac+ab+b^2+ac+ac+bc+c^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

trouve :

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)^2 &= a^2x^4+b^2x^2+c^2+2(abx^3+bcx+cax^2)\\ &= a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2\end{aligned}$$

2) Soit n est le produit de quatre entiers naturels consécutifs. Il existe donc un entier naturel x tel que $n = x(x+1)(x+2)(x+3)$. On a alors

$$n+1 = x(x^2+3x+2)(x+3)+1 = x(x^3+3x^2+2x+3x^2+9x+6) = x^4+6x^3+11x^2+6x+1.$$

On remarque alors que, si on prend $a=1$, $b=3$ et $c=1$, alors $2ab=6$, $b^2+2ac=11$ et $2bc=6$. Ainsi

$$n+1 = (x^2+3x+1)^2.$$

Puisque x est un entier, x^2+3x+1 aussi et donc n est bien le carré d'un entier.

Alternative qui simplifie le calcul : on écrit plutôt n sous la forme $n=(y-1)y(y+1)(y+2)$ avec y un entier naturel non nul (simplement $x=y-1$). On a alors

$$n+1 = (y^3-y)(y+2)+1 = y^4+2y^3-y^2-2y+1 = (y^2+y-1)^2.$$

Exercice 14.

1) Calculer $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ pour tout réel x.
2) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor \in \{0;1\}$.
3) Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.
4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. A quelle condition sur $x\in\mathbb{R}$, a-t-on $\lfloor nx\rfloor = n\lfloor x\rfloor$.

Correction :

1) Si $x\in\mathbb{Z}$, alors $\lfloor x\rfloor = x$ et $\lfloor -x\rfloor = -x$ si bien que $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = 0$.

   Supposons que $x\notin\mathbb{Z}$. On a $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor+1$ et $\lfloor -x\rfloor < -x < \lfloor -x\rfloor + 1$. En sommant ces deux termes, on obtient
   $$\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor < 0 < \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor + 2$$
   c'est-à-dire $-2 < \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor < 0$. Ainsi $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -2 et 0. Nous en déduisons que $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = -1$.
2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous avons $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $-x \leqslant -\lfloor x\rfloor < 1-x$. Nous avons $\lfloor y\rfloor \leqslant y < \lfloor y\rfloor + 1$ donc $-y \leqslant -\lfloor y\rfloor < 1-y$. Enfin $\lfloor x+y\rfloor \leqslant x+y < \lfloor x+y\rfloor + 1$ donc $x+y-1 < \lfloor x+y\rfloor \leqslant x+y$. En sommant ces trois inégalités, on obtient
   $$-x-y+x+y-1 < \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor < 1-x+1-y+x+y,$$
   c'est-à-dire $-1 < \lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor < 2$. Ainsi $\lfloor x+y\rfloor - \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -1 et 2. Il s'agit donc de 0 ou de 1.
3) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$. On a $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $\lfloor x\rfloor + n < x+n < (\lfloor x\rfloor + n)+1$. Puisque $\lfloor x\rfloor + n \in\mathbb{Z}$ nous obtenons, par unicité de la partie entière du réel $x+n$, que $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$.
4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On sait que $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $n\lfloor x\rfloor \leqslant nx < n\lfloor x\rfloor + n$.

   On a donc $\lfloor nx\rfloor = n\lfloor x\rfloor$ si et seulement si $n\lfloor x\rfloor \leqslant nx < n\lfloor x\rfloor + 1$ si et seulement si $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + \dfrac{1}{n}$ si et seulement si $x < \lfloor x\rfloor + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 16. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. A-t-on $\sup(A) \leqslant \sup(B)$? $\sup(A) \geqslant \sup(B)$? $\inf(A) \leqslant \inf(B)$? $\inf(A) \geqslant \inf(B)$?

Correction :

- Pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $x \leqslant \sup(B)$. Ainsi $\sup(B)$ est un majorant de A et donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ (puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A).
- Sur l'exemple $A = [0\,;1]$, $B = [-1\,;2]$, on a $\sup(A) = 1$ et $\sup(B) = 2$ donc il est faux que $\sup(A) \geqslant \sup(B)$ en toute généralité.
- Pour tout $x \in A$, $x \in B$ donc $x \geqslant \inf(B)$. Ainsi $\inf(B)$ est un minorant de A et donc $\inf(A) \geqslant \inf(B)$ (puisque $\inf(A)$ est le plus grands des minorants de A).
- Sur l'exemple $A = [0\,;1]$, $B = [-1\,;2]$, on a $\inf(A) = -1$ et $\inf(B) = 0$ donc il est faux que $\inf(A) \leqslant \inf(B)$ en toute généralité.

Exercice 17. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b \,|\, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B. Supposons que A et B soient majorées.

1) Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B)$.
2) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Correction :

1) Les parties A et B de $\mathbb{R}$ sont non vides et majorées donc elles admettent des bornes supérieures. Pour tous $a \in A$ et $b \in B$, $a \leqslant \sup(A)$ et $b \leqslant \sup(B)$ donc $a + b \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi la partie $A + B$ est majorée (par $\sup(A) + \sup(B)$) et non vide donc elle admet une borne supérieure. Par ailleurs $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$ donc
$$\sup(A + B) \leqslant \sup(A) + \sup(B).$$
2) Utilisons la caractérisation de la borne supérieure. On sait déjà que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$. Donnons-nous $x < \sup(A) + \sup(B)$ et montrons qu'il existe $c \in A + B$ tel que $x < c$.

   On a $x - \sup(B) < \sup(A)$ et, par caractérisation de $\sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $x - \sup(B) < a$. On a donc $x - a < \sup(B)$ et, par caractérisation de $\sup(A)$, il existe $b \in B$ tel que $x - a < b$. Ainsi $x < a + b$ et on a bien $c = a + b \in A + B$.

   Ainsi $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\lvert 7x - 4\rvert = \lvert 3 - 2x\rvert$,	3) $13x - 5x^2 = 9$,	5) $6x^4 + 11x^2 - 7 = 0$,
2) $\lvert x - 19\rvert = \lvert x + 11\rvert$,	4) $(9 - x)(x + 3) = 30$,	6) $\sqrt{1 + x} - \sqrt{4 - x} = 2$,

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$|x - 19| = |x + 11| \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x - 19 = x + 11 \\ \text{ou } x - 19 = -x - 11 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} -19 = 11 \\ \text{ou } 2x = 8 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$
3) Il s'agit d'un équation polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta = 13^2 - 4(-5)(-9) = 169 - 180 = -11 < 0$. Nous en déduisons qu'elle n'admet pas de solutions réelles.
4) Si $x \in \mathbb{R}$, alors $(9-x)(x+3) = 9x+27-x^2-3x = -x^2+6x+27$. Les solutions de l'équation $(9-x)(x+3) = 30$ sont donc les solutions de l'équation $x^2 - 6x + 3 = 0$. Il s'agit d'un équation polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 36 - 12 = 24 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles :
$$\frac{6 - \sqrt{24}}{2} = 3 - \sqrt{6} \qquad \text{et} \qquad \frac{6 + \sqrt{24}}{2} = 3 + \sqrt{6}.$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$6x^4 + 11x^2 - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6y^2 + 11y - 7 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

L'équation $6y^2 + 11y - 7 = 0$ est polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-7)(-9) = 121 + 168 = 289 = 17^2 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{-11+17}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-11-17}{2 \cdot 6} = -\frac{7}{3}.$$

Ainsi

$$6x^4 + 11x^2 - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \ \text{ ou } \ x^2 = -\frac{7}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

6) Traitée en cours.

Exercice 19. Résoudre le système d'équation $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ xy = 9 \end{cases}$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Correction : Commençons par remarquer que, si les réels x et y sont solutions alors ils ne sont pas nuls (en effet $0 \neq 9$). Par conséquent :

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ xy = 9 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 + yx = 12x \\ xy = 9 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ y = \dfrac{9}{x} \end{cases}$$

L'équation du second degré $3x^2 - 12x + 9 = 0$ admet pour discriminant $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 9 \cdot 4^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3 = 9 \cdot 4 \cdot (4 - 3) = 36 = 6^2 > 0$. Par conséquent elle admet deux solutions $x = \dfrac{12+6}{2 \cdot 3} = 3$ et $x = \dfrac{12-6}{2 \cdot 3} = 1$. Nous en déduisons que

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ xy = 9 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = 1 \\ y = \dfrac{9}{x} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{9}{x} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{9}{x} \end{cases}$$

L'équation admet donc deux couples de solutions qui sont $(3, 3)$ et $(1, 9)$.

Exercice 20. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $2x^2 + 25x - 42 > 0$,
2) $|2x - 5| < |x + 3|$,
3) $x^2 - 4|x| \leqslant 5$,
4) $|x^2 - 6x + 7| < 1$.
5) $23x^2 - 12x^4 \geqslant 10$,
6) $e^x > 1 + 6e^{-x}$,
7) $2(x - 2)(1 - 2x) + 1 < x(x + 3)$,
8) $\dfrac{1}{3x^2 + 2x + 4} \geqslant \dfrac{2}{5x^2 + 6x + 1}$,

Correction :

1) Calculons le discriminant de $2X^2 + 25X - 42$. Il s'agit de

$$\Delta = (25)^2 - 4 \times 2 \times (-42) = 625 + 336 = 961 = 31^2$$

Comment trouver $961 = 31^2$? On sait que $961 = 900 + 60 + 1 = 30^2 + 2 \times 30 + 1 = (30 + 1)^2$.

Il admet donc deux racines réelles : $\dfrac{-25+31}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-25-31}{4} = -14$. Ainsi $2x^2 + 25x - 42 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -14[\cup]3/2, +\infty[$.

2) *Première méthode :* On considère plusieurs cas pour "détruire" les valeurs absolues :

- Supposons que $x \in]-\infty\,; -3]$. On a alors

$$|2x - 5| < |x + 3| \quad \Longleftrightarrow \quad 5 - 2x < -(x + 3) \quad \Longleftrightarrow \quad 8 < x$$

si bien que $|2x - 5| < |x + 3|$ n'est pas vérifié.

- Supposons que $x \in [-3\,;5/2]$. On a alors

$$|2x-5| < |x+3| \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5-2x < x+3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3} < x$$

  si bien que $|2x-5| < |x+3|$ si et seulement si $x \in]2/3\,;5/2]$.
- Supposons que $x \in]5/2\,;+\infty[$. On a alors

$$|2x-5| < |x+3| \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x-5 < x+3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 8$$

  si bien que $|2x-5| < |x+3|$ si et seulement si $x \in]5/2\,;8[$.

Nous en déduisons que $|2x-5| < |x+3|$ si et seulement si $x \in]2/3\,;8[$.

Deuxième méthode : On passe au carré. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} |2x-5| < |x+3| \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (2x-5)^2 < (x+3)^2 \qquad &\Longleftrightarrow& \qquad 4x^2-20x+25 < x^2+6x+9 \\ & &\Longleftrightarrow& \qquad 3x^2-26x+16 < 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $3X^2-26X+16$ est $\Delta = 22^2$ si bien qu'il admet deux racines réelles : $\dfrac{26-22}{2\cdot 3} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{26+22}{2\cdot 3} = 8$. Il prend donc des valeurs strictement négatives *entre ses racines*, c'est-à-dire sur l'intervalle $]2/3\,;8[$.

3) Traitée en cours.
4) Traitée en cours.
5) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$23x^2 - 12x^4 \geqslant 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 12y^2 - 23y + 10 \leqslant 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Le trinôme du second degré $12X^2 - 23X + 10$ admet pour discriminant $\Delta = (-23)^2 - 4\cdot 12\cdot 10 = 49 = 7^2 > 0$. Il admet donc deux racines : $\dfrac{23-7}{2\cdot 12} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{23+7}{2\cdot 12} = \dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$. Nous en déduisons que

$$23x - 12x^2 \geqslant 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3} < x^2 < \frac{5}{4}.$$

<u>Premier cas :</u> $x \geqslant 0$. On a alors

$$23x - 12x^2 \geqslant 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

<u>Deuxième cas :</u> $x < 0$. On a alors

$$23x - 12x^2 \geqslant 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} < -x < \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{\sqrt{5}}{2} < x < -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\left]-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[\bigcup \left]\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$$

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $e^x > 0$, on a

$$\begin{aligned} e^x > 1 + 6e^{-x} \qquad &\Longleftrightarrow \qquad e^x e^x > e^x(e^x+6) \qquad &\Longleftrightarrow& \qquad (e^x)^2 - e^x - 6 > 0 \\ & &\Longleftrightarrow& \qquad (e^x)^2 - e^x - 6 > 0 \\ & &\Longleftrightarrow& \qquad \begin{cases} y^2 - y - 6 > 0 \\ y = e^x \end{cases}. \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $X^2 - X - 6$ admet pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot(-6) = 1 + 24 = 5^2 > 0$. Il admet donc deux racines : $\dfrac{1-5}{2} = -2$ et $\dfrac{1+5}{2} = 3$. Nous en déduisons que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$y^2 - y - 6 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} e^x > 1 + 6e^{-x} &\iff e^x \in]-\infty\,;-2[\,\cup\,]3\,;+\infty[\\ &\iff e^x < -2 \quad \text{ou} \quad e^x > 3 \\ &\iff x > \ln(3), \end{aligned}$$

puisque l'exponentielle d'un réel est toujours positive. Ainsi l'ensemble des solutions est $]\ln(3)\,;+\infty[$.

7) $2(x-2)(1-2x)+1 < x(x+3)$,
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 2(x-2)(1-2x)+1 < x(x+3) &\iff 2(x-2-2x^2+4x)+1-x^2-3x < 0 \\ &\iff 10x-4-4x^2+1-x^2-3x < 0 \\ &\iff 5x^2-7x+3 > 0 \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $5X^2-7X+3$ admet pour discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4\cdot 5\cdot 3 = -11 < 0$. Puisque $5 > 0$, on a $5x^2-7x+3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ tout entier.

8) Soit x un réel vérifiant $\dfrac{1}{3x^2+2x+4} \geqslant \dfrac{2}{5x^2+6x+1}$. Il faut déjà que les quotients des deux dénominateurs soient non nuls.

- Le trinôme $3X^2+2X+4$ admet pour discriminant $\Delta = -44 < 0$ donc il est strictement positif. En particulier il ne s'annule jamais.
- Le trinôme $5X^2+6X+1$ admet pour discriminant $\Delta = 16 > 0$. Par conséquent il s'annule en $\dfrac{-6+\sqrt{\Delta}}{2\cdot 5} = -1$ et en $\dfrac{-6-\sqrt{\Delta}}{2\cdot 5} = -\dfrac{1}{5}$. Par ailleurs il est strictement négatif si et seulement si $]-1,-1/5[$.

Soit $x \notin \{-1,-1/5\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x^2+2x+4} \geqslant \frac{2}{5x^2+6x+1} &\iff \frac{1}{3x^2+2x+4} - \frac{2}{5x^2+6x+1} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{5x^2+6x+1-2(3x^2+2x+4)}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)} \geqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2-2x+7}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Or le trinôme X^2-2X+7 admet pour discriminant $-24 < 0$ donc il est toujours strictement positif. Par conséquent $\dfrac{x^2-2x+7}{(3x^2+2x+4)(5x^2+6x+1)}$ est du signe de $5x^2+6x+1$. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est $]-1,-1/5[$.