Correction de quelques exercices de la feuille de TD 26

Exercice 1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Expliciter les projections sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. F).

Correction : F est un s.e.v car c'est un espace engendré. G est aussi un s.e.v (*je vous laisse le faire*). Raisonnons par analyse/synthèse.

- **Analyse.** Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons qu'il existe $(a,b,c) \in F$ et $(u,v,w) \in G$ tel que
$$(x,y,z) = (a,b,c) + (u,v,w).$$
Comme $(u,v,w) \in G$, $u+v+w=0$. Comme $(a,b,c) \in F$, on a $a=b$ et $c=0$ (*il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que* $(a,b,c) = \lambda(1,1,0) = (\lambda,\lambda,0)$). Résumons :
$$\begin{cases} x = a+u \\ y = b+v \\ z = c+w \\ u+v+w=0 \\ a=b \\ c=0 \end{cases}$$
Ici x,y,z sont connus alors que a,b,c,u,v,w sont inconnues et on cherche à les exprimer en fonction de x,y,z. On a six équations et six inconnues donc bon espoir de trouver une (et une seule) solution. On pourrait réécrire le système ainsi
$$\begin{cases} u \quad\quad\quad\quad + a \quad\quad\quad = x \\ \quad v \quad\quad\quad\quad + b \quad = y \\ \quad\quad w \quad\quad\quad\quad + c = z \\ u + v + w \quad\quad\quad\quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad a - b \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad c = 0 \end{cases}$$
puis utiliser la méthode de Gauss. Mais on va faire autrement ici.

On a déjà $\boxed{c=0}$ donc $\boxed{w=z}$. Ensuite $u = x-a$, $v = y-b = y-a$ et $(x-a)+(y-a)+z = u+v+w = 0$ donc $\boxed{a = \dfrac{x+y+z}{2}}$ et $\boxed{b = a = \dfrac{x+y+z}{2}}$. Enfin $\boxed{u = x-a = \dfrac{x-y-z}{2}}$ et $\boxed{v = y-b = \dfrac{-x+y-z}{2}}$.
Nous en déduisons que, si une telle décomposition existe, alors elle est unique et il s'agit de
$$(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{2}, \frac{x+y+z}{2}, 0\right) + \left(\frac{x-y-z}{2}, \frac{-x+y-z}{2}, z\right).$$

- **Synthèse.** Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors $\left(\dfrac{x+y+z}{2}, \dfrac{x+y+z}{2}, 0\right) = \dfrac{x+y+z}{2}(1,1,0) \in F$ et $\left(\dfrac{x-y-z}{2}, \dfrac{-x+y-z}{2}, z\right) \in G$ (puisque $\dfrac{x-y-z}{2} + \dfrac{-x+y-z}{2} + z = 0$) et la somme de ces deux vecteurs est bien égale à (x,y,z).

Ainsi tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Il s'ensuit que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

De plus l'application $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left(\dfrac{x+y+z}{2}, \dfrac{x+y+z}{2}, 0\right)$ est la projection sur F parallèlement à G et l'application $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left(\dfrac{x-y-z}{2}, \dfrac{-x+y-z}{2}, z\right)$ est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 3. Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles constantes et G l'ensemble des suites convergentes vers 0. Montrer que $E = F \oplus G$ et expliciter les projections sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. F).

Correction : Déjà F et G sont bien des s.e.v de E (*Je vous laisse le faire*).

Montrons que la somme est directe. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \cap G$, alors il s'agit d'une suite constante qui tend vers 0. C'est donc la suite nulle. Ainsi $F \cap G = \{0\}$ et donc la somme est directe : $F + G = F \oplus G$.

Donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Puisqu'elle converge notons ℓ sa limite. On a alors

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(\ell)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in F} + \underbrace{(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in G}.$$

Ainsi $E \subset F + G$ et donc $E = F + G$ et donc $E = F \oplus G$.

Si on arrive pas à trouver la décomposition, on raisonne par analyse/synthèse. Donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Il existe $w \in \mathbb{R}$ tel que $w_n = w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ converge, notons ℓ sa limite. On a $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $w = w_n = u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - 0 = \ell$. Ainsi $\boxed{w = \ell}$. Et donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$. On fait l'étape de synthèse.

De plus l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \longmapsto \left(\lim\limits_{k\to+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la projection sur F parallèlement à G et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \longmapsto \left(u_n - \lim\limits_{k\to+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 6. Notons $F = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est constante}\}$, $G_- = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est nulle sur } [0\,;+\infty[\}$ et $G_+ = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est nulle sur }]-\infty\,;0]\}$. Montrer que F, G_- et G_+ sont des sous-espaces vectoriels de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G_- \oplus G_+$.

Correction :

- Montrons que G_+ est un s.e.v de E. Déjà la fonction nulle est dans G_+ et, si $(f,g) \in (G_+)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, si $x \leqslant 0$, $(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$. Ainsi $\lambda f + g \in G_+$.

  De même, on montrer que F et G_- sont des s.e.v E.

- Commençons par montrer que la somme est directe (*Attention, on n'utilise surtout pas la technique de l'intersession qui est fausse lorsqu'on a strictement plus que deux s.e.v. On utilise la technique de la somme : On se donne f, g, h dans F, $G+$ et $G-$ respectivement tels que $f + g + h = 0$ et mon essaye de montrer que $f = g = h = 0$*).

  On se donne f, g, h dans F, $G+$ et $G-$ respectivement tels que $f + g + h = 0$.

  0 est le seul point dont on connaît le comportement pour les 3 fonctions recherchées. Il est donc naturel d'évaluer en 0.

  On sait que $g(0) = h(0) = 0$. Donc $f(0) = 0$ et donc f est constante nulle en 0 donc f est la fonction nulle. On a donc $g + h = 0$. Si on évalue en un $x \leqslant 0$, on obtient $h(x) = 0 + h(x) = g(x) + h(x) = 0$. Ainsi h est nulle sur $\mathbb{R}_-$ mais on sait aussi que h est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. Et enfin g est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la somme est directe.

- Montrer que $E = F + G_- + G_+$. Raisonnons par analyse/synthèse.

  Analyse. Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Supposons que f s'écrit sous la forme $g + h + \phi$ avec $g \in F$, $h \in G^+$ et $\phi \in G_-$.

  — $g \in F$ donc g est une fonction constante. Notons c cette constante. On a $f(0) = c + h(0) + \phi(0) = c$. Ainsi $\boxed{c = f(0)}$.

  — Évaluons en un $x > 0$: $f(x) = c + h(x) + \phi(x) = c + h(x) + 0$ donc $h(x) = f(x) - c = f(x) - f(0)$.

  — Évaluons en un $x < 0$: $f(x) = c + h(x) + \phi(x) = c + 0 + \phi(x)$ donc $\phi(x) = f(x) - c = f(x) - f(0)$.

Ainsi, si une telle décomposition existe, elle est unique (*et donc l'étape d'unicité précédemment faite n'était pas utile en fait*) et il s'agit de $f = g + h + \phi$ avec

$$g : x \longmapsto f(0), \qquad h : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ f(x) - f(0) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}, \qquad \phi : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ f(x) - f(0) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Synthèse. Les fonctions g, h et ϕ définies ci-dessus sont bien continues sur $\mathbb{R}$. La première est constante, la deuxième est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et la troisième nulle sur $\mathbb{R}_+$. Enfin leur somme est bien égale à f.

Ainsi $E = F \oplus G_+ \oplus G_-$.

Exercice 7. Soit $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.

Correction :

- Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe. Soit $k \in [\![2, n]\!]$ et $x \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$. Il existe $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_{k-1}$. On a donc $x_1 + \cdots + x_{k-1} + (-x) = 0$ et, puisque $(-x) \in F_k$, nous obtenons que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = -x = 0$. Ainsi $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.
- Réciproquement supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ ne soit pas directe. Il existe alors un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ non nul dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

  Notons k le plus grand entier compris entre 1 et n tel que $x_k \neq 0$ (et on a forcément $k \geqslant 2$ puisqu'au moins un des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ est non nul). On a alors $0 = x_1 + \cdots + x_k$ et donc

  $$x_k = -(x_1 + \cdots + x_{k-1}) \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$$

  tandis que $x_k \neq 0$. Nous venons de montrer que si $F_1 + \cdots + F_n$ n'est pas directe, alors il existe $k \in [\![2, n]\!]$ tel que $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) \neq \{0\}$. Par contraposée, si $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, alors la somme est directe.

Exercice 8. Soit $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2y - 3x, 4y - 6x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G.

Correction : Remarquons que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (*je vous laisse détailler ce point... c'est ultra classique et facile*). Ensuite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p \circ p(x, y, z) = p((2y-3x, 4y-6x)) = (2(4y-6x)-3(2y-3x), 4(4y-6x)-6(2y-3x)) = (2y-3x, 4y-6x) = p(x, y, z).$$

Ainsi $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement $G = \mathrm{Ker}(p)$.

- Puisque $((1, 0), (0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^2$, on a

  $$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(1, 0), p(0, 1)) = \mathrm{Vect}((-3, -6), (2, 4)) = \mathrm{Vect}((1, 2)).$$

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

  $$\begin{aligned} (x, y, z) \in G \quad &\iff \quad p(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad \iff \quad \begin{cases} 2y - 3x & = 0 \\ 4y - 6x & = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad 2y = 3x \\ &\iff \quad (x, y) = \frac{x}{2}(2, 3) \end{aligned}$$

  Ainsi $G = \mathrm{Vect}((2, 3))$.

Exercice 9. Soit $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G.

Correction : Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ensuite donnons-nous (x, y, z) et (u, v, w) deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et un scalaire λ. On a

$$\begin{aligned} p(\lambda(x, y, z) + (u, v, w)) = p(\lambda x + u, \lambda y + v, \lambda z + w) &= \big(\lambda x + u + \lambda z + w, \lambda y + v + \lambda z + w, 0\big) \\ &= \big(\lambda(x + z) + u + w, \lambda(y + z) + v + w, 0\big) \\ &= \lambda(x + z, y + z, 0) + (u + w, v + w, 0) \\ &= \lambda p(x, y, z) + p(u, v, w). \end{aligned}$$

Ainsi $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ensuite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p \circ p(x, y, z) = p(x + z, y + z, 0) = \big((x + z) + 0, (y + z) + 0, 0\big) = p(x, y, z).$$

Ainsi $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que p est la projection sur $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$ parallèlement $G = \mathrm{Ker}(p)$.

- **Méthode utilisant le fait que $F = \mathrm{Im}(p)$.** Puisque $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(1, 0, 0), p(0, 1, 0), p(0, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)),$$

car $(1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$. Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et il est immédiat que $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est libre.

Méthode utilisant le fait que $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F \quad &\iff \quad (x, y, z) - p(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} x - (x + z) & = 0 \\ y - (y + z) & = 0 \\ z - 0 & = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad z = 0 \\ &\iff \quad (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et il est immédiat que $((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ est libre.

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G \quad &\iff \quad p(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} x + z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad x = y = -z \\ &\iff \quad (x, y, z) = z(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

Ainsi $G = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1))$.

Exercice 10. Reprendre l'exercice 3 de la feuille de TD n° 21 et montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction : On a montré que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,\big((1, 2, 1)\big)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,\big((0, 2, 1), (1, -1, 0)\big)$. Raisonnons par analyse/synthèse.
Analyse. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$ et $(u, v, w) \in \mathrm{Ker}(f)$ tels que $(x, y, z) = (a, b, c) + (u, v, w)$.
- Comme $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b, c) = \lambda(0, 2, 1) + \mu(1, -1, 0) = (\mu, 2\lambda - \mu, \lambda)$.

- Comme $(u,v,w) \in \mathrm{Ker}(f)$, il existe $u = w = 2v$.

On a donc $x = a+u = \mu + 2v$, $y = b+v = 2\lambda - \mu + v$, $z = c+w = \lambda + 2v$. Or on a

$$\begin{cases} 2v & & & + & \mu & = & x \\ v & + & 2\lambda & - & \mu & = & y \\ 2v & + & \lambda & & & = & z \end{cases} \iff \begin{cases} 2v & & + & \mu & = & x & \\ & 4\lambda & - & 3\mu & = & 2y-x & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ & \lambda & - & \mu & = & z-x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2v & & + & \mu & = & x & \\ & 4\lambda & - & 3\mu & = & 2y-x & \\ & & - & \mu & = & 4(z-x)-(2y-x) & L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2 \end{cases}$$

On trouve alors $\mu = 3x+2y-4z$, puis $\lambda = \frac{1}{4}(2y-x+9x+6y-12z) = \frac{1}{4}(8x+8y-12z) = 2x+2y-3z$ et enfin $v = \frac{1}{2}(x-3x-2y+4z) = -x-y+2z$.

Ainsi $a = 3x+2y-4z$, $b = 2(2x+2y-3z)-(3x+2y-4z) = x+2y-2z$ et $c = \lambda = 2x+2y-3z$. Enfin $u = w = -2x-2y+4z$.

Ainsi, si une telle décomposition existe, elle est unique et il s'agit de

$$(x,y,z) = (3x+2y-4z, x+2y-2z, 2x+2y-3z) + (-2x-2y+4z, -x-y+2z, -2x-2y+4z).$$

Synthèse. Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$(3x+2y-4z, x+2y-2z, 2x+2y-3z) = (2x+2y-3z)(0,2,1) + (3x+2y-4z)(1,-1,0) \in \mathrm{Im}(f),$$

$$(-2x-2y+4z, -x-y+2z, -2x-2y+4z) = (-x-y+2z)(1,2,1) \in \mathrm{Ker}(f)$$

et la somme de ces deux vecteurs est bien égale à (x,y,z).

Ainsi $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

Aurait-on pu faire autrement ? Si on montre que f est un projecteur, alors on a $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. Est-ce le cas ? Donnons-nous $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f \circ f(x,y,z) &= f(y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z) \\ &= \big((2x+y-4z) - 2(x+y-3z), \\ &\qquad 2(y-2z) + (2x+y-4z) - 4(x+y-3z), (y-2z) + (2x+y-4z) - 3(x+y-3z)\big) \\ &= (-y+2z, -2x-y+4z, -x-y+3z) \\ &= -f(x,y,z). \end{aligned}$$

Ainsi $f \circ f = -f$ donc f n'est pas un projecteur. Mais on a $(-f)\circ(-f) = (-1)^2 f \circ f = -f$ donc $-f$ est un projecteur. On a donc

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(-f) \oplus \mathrm{Ker}(-f) = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f).$$

Cette dernière égalité est une simple conséquence de la linéarité de f. Cela doit être clair donc montrons-le une bonne fois pour toutes :

- *Soit $x \in E$. On a $x \in \mathrm{Ker}(-f)$ ssi $(-f)(x) = 0$ ssi $f(x) = 0$ ssi $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(-f) = \mathrm{Ker}(f)$.*
- *Soit $x \in E$. On a $x \in \mathrm{Im}(-f)$ ssi il existe $y \in E$ tel que $x = (-f)(y) = f(-y)$ ssi il existe $z \in E$ (avec $z = -y$) tel que $x = f(z)$ ssi $x \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\mathrm{Im}(-f) = \mathrm{Im}(f)$.*