Correction de quelques exercices de la feuille de TD 24

Exercice 1. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$1)\ \sum \frac{n^2(-1)^n}{n!}, \qquad 2)\ \sum \frac{n(n-1)7^n}{(n+1)!}, \qquad 3)\ \sum (-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}, \qquad 4)\ \sum \frac{n^2+n-3}{5^{n-1}}.$$

Correction :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{n^2(-1)^n}{n!} = \frac{n(n-1)+n}{n!}(-1)^n = \frac{n(n-1)}{n!}(-1)^n + \frac{n}{n!}(-1)^n.$$

Si $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{n^2(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série converge puisqu'elle est la somme de deux séries exponentielles convergentes. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(-1)^{n-2}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-1} - e^{-1} = 0.$$

2) Traitée en cours.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n} = (-1)^{n-1}\frac{n}{3^n} - (-1)^{n-1}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\, n \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

La série converge donc puisqu'elle est la somme de séries géométriques dérivées de raison $-\frac{1}{3} \in \left]-1,1\right[$. De plus

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n} &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{(1-(-1/3))^2} + \frac{1}{1-(-1/3)} - 1 \\
&= \frac{1}{3}\frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

4) Traitée en cours.

Exercice 2. Justifier que $0,9999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\cdots = 1$.

Correction : Le nombre $0,99999999999999999\ldots$, s'il a un sens, est

$$9\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + 9\cdot 10^{-3} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} 9\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k - 1\right) = 9\left(\frac{1}{1-1/10} - 1\right) = 9\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9}\right) = 1,$$

puisque la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ converge (c'est une série géométrique de raison $1/10 \in \left]-1,1\right[$).

Exercice 3. Trouver une fraction dont le développement décimal est $23,2323232323232323232323232323232323\ldots$

Correction : On a

$$\begin{aligned}23,2323232323\ldots &= 23+0,23+0,0023+0,000023+0,00000023+\ldots\\ &= 23(1+0,01+0,0001+0,000001+0,00000001+\ldots)\\ &= 23\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k\\ &= 23\frac{1}{1-1/100}=\frac{23*100}{99}=\frac{2300}{99}=\frac{700}{33}.\end{aligned}$$

La série géométrique ci-dessus converge bien puisque $\left|\dfrac{1}{100}\right|<1$.

Exercice 4. (★ à ★★) Étudier la convergence des séries de terme général

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,
2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$,
4) $\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$,
5) $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}$,
6) $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}$,
7) $\dfrac{\sqrt{e}}{n^{1/5}\ln(n)}$,
8) $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$,
9) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
10) $\dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$,
11) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
12) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+5}\right)$,
13) $\dfrac{(-1)^n\ln(n)}{n^{5/4}}$,
14) $1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$,
15) $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
16) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
17) $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
18) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
19) $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2024+n\sqrt{n}}\right)}$,
20) $\dfrac{\operatorname{Arctan}(n^n)}{\ln(n)}\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^{3/7}}\right)\right)$,
21) $\sin(n!)\left(\sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)}-1\right)\sqrt{\ln(n)}$.

Correction :

1) Traitée en cours
2) Traitée en cours
3) On a $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}=\dfrac{1}{n^{3/2}}$. Comme $\dfrac{3}{2}>1$, la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$ converge.
4) Traitée en cours
5) Traitée en cours
6) Puisque $\dfrac{-2}{n^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-2}{n^3}\right)=\dfrac{2}{3n^3}$. La série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^3}$ converge donc $\sum\dfrac{2}{3n^3}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\left(1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}\right)$.
7) Traitée en cours
8) On a $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\underset{+\infty}{=}\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{\pi^2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puisque $\dfrac{\pi}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Ainsi $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\underset{+\infty}{=}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{3\pi^2}{2n}$. La série $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\left(\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)$ diverge.

9) Traitée en cours

10) On a $n^2 \left| \dfrac{(-1)^n n!}{n^n} \right| = \dfrac{n!}{n^{n-2}} = \underbrace{\dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 4}{n \times n \times n \times \ldots n}}_{n-3 \text{ termes}} \times \dfrac{3 \times 2}{n}$.

Le quotient ci-dessus est inférieur ou égal à 1 si bien que $n^2 \left| \dfrac{(-1)^n n!}{n^n} \right| \leqslant \dfrac{6}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\left| \dfrac{(-1)^n n!}{n^n} \right| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$ converge absolument donc converge.

11) On a $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ par croissances comparées. Ainsi $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.

12) On a $-\dfrac{1}{n+5} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+5}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n+5} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+5}\right)$ diverge et donc $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+5}\right)$ diverge.

13) Traitée en cours.

14) Traitée en cours.

15) Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

16) Traitée en cours.

17) On a $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3} = \exp\left(n^3 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Regardons ce qu'il se passe à l'intérieure de l'exponentielle. Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc

$$n^3 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^3 \ln\left(1 + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} n^3 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} n^3 \left(-\frac{1}{2n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2}.$$

Pas question de passer à l'exponentielle dans un équivalent mais on peut penser que, au voisinage de $+\infty$, la suite est « de l'ordre » de $e^{-n/2}$ et donc converge vite.

On a

$$n^2 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3} = \exp\left(2\ln(n) + n^3 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

Comme $2\ln(n) + n^3 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} 2\ln(n) - \dfrac{n}{2} + o(n) \underset{+\infty}{=} o(n) - \dfrac{n}{2} + o(n)$ par croissances comparées, il vient que $2\ln(n) + n^3 \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ et donc $n^2 \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Autrement dit $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$ converge.

18) Puisque $\dfrac{1}{2020 + n\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a $\tan\left(\dfrac{1}{2020 + n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2020 + n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Ainsi $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2020 + n\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/4}}$. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2020 + n\sqrt{n}}\right)}$ diverge.

19) On a $\dfrac{\mathrm{Arctan}(n^n)}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2\ln(n)}$. Ensuite

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)\right) = \ln\left(1+\cos\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \cos\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)-1$$
$$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)^2 = -\frac{1}{2n^{5/3}}.$$

On a $(1+5/3)/2 = 4/3$ et

$$-n^{4/3}u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi n^{4/3}}{4n^{5/3}\ln(n)} = \frac{\pi}{4n^{1/3}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $-u_n \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{4/3}}\right)$.

Puisque $4/3 > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{4/3}}$ converge et donc, par comparaisons de séries à termes positifs, $\sum(-u_n)$ converge absolument et donc $\sum u_n$ converge.

20) Traitée en cours.

Exercice 5. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

On pourra déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

Correction : Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge si bien que $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Si on choisit $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$ (on trouve ces quantités en résolvant un système par exemple), alors $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2} = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j},$$

à l'aide de changement de variables. On a donc

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 7. Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\sum n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right)$,

3) $\sum \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$,

5) $\sum \frac{1}{\alpha^{\ln(n)}}$,

2) $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$,

4) $\sum \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$,

6) $\sum \sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n}$.

Correction :

1) Traitée en cours.

2) On a

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\,\frac{1}{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

donc $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$.

La série $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$, i.e. $\alpha > 2$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

3)
- Si $\alpha < 0$ alors $(\ln(n))^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exp(-(\ln(n))^\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(-(\ln(n))^\alpha) = e^{-1}$. Ainsi la série diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 0$ alors $\exp(-(\ln(n))^\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  On ne peut pas trouver d'équivalent plus simple donc essayons de déterminer si la convergence a lieu rapidement ou pas.

  — Si $\alpha \in]0,1]$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\ln(n))^\alpha \leqslant \ln(n)$ donc $\exp(-(\ln(n))^\alpha) \geqslant \frac{1}{n}$. Puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \exp(-(\ln(n))^\alpha)$ diverge.

  — Si $\alpha \in]1\,;+\infty[$ alors

  $$n^2\exp(-(\ln(n))^\alpha) = \exp(2\ln(n)-(\ln(n))^\alpha) = \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\left(1-2(\ln(n))^{1-\alpha}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  Ainsi $\exp(-(\ln(n))^\alpha) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \exp(-(\ln(n))^\alpha)$ converge.

Récapitulons : la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4) Traitée en cours.

5) Déjà si $\alpha \leqslant 0$, alors le terme général de la série n'est pas défini. Supposons que $\alpha > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{\alpha^{\ln(n)}} = \frac{1}{e^{\ln(\alpha)\ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\alpha)}}$. Ainsi la série converge si et seulement si $\ln(\alpha) > 1$ si et seulement si $\alpha > e$.

6) A quelles conditions a-t-on $\sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? C'est le cas si et seulement si $\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si et seulement si $u_n = n\ln\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Si $\alpha = 0$, $u_n = -n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = -n\ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si $\alpha < 0$, $u_n = -n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = -n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{n^\alpha} = -\frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leqslant 1$, on en déduit que la série diverge grossièrement.

Supposons que $\alpha > 1$. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n} = \sqrt{1-e^{u_n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{-u_n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2}}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série converge si et seulement si $\dfrac{\alpha-1}{2} > 1$ si et seulement si $\alpha > 3$.

Exercice 8. Étudier la convergente absolue et la convergence des séries suivantes

$$1)\ \sum (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad 2)\ \sum \sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right), \qquad 3)\ \sum (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

Indication : si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des sommes partielles alors, pour montrer la convergence de ces séries, on pourra essayer de prouver que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces séries sont dites alternées. L'étude générale des séries alternées (cf. exercice I) n'est pas au programme d'ECS mais la méthode d'étude est standard et il faut la connaitre.

Correction :

1) Traitée en cours.

2)
- On a $S_{n+1} - S_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{3n+3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sin\left(\frac{(-1)^{2n+2}\pi}{6n+6}\right) + \sin\left(\frac{(-1)^{2n+1}\pi}{6n+3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6n+6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6n+3}\right) < 0$$

car $0 \leqslant \dfrac{\pi}{6n+6} < \dfrac{\pi}{6n+3} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et sin est croissante sur $[0,\pi/2]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sin\left(\frac{(-1)^{2n+3}\pi}{6n+9}\right) + \sin\left(\frac{(-1)^{2n+2}\pi}{6n+6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6n+9}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6n+6}\right) > 0$$

car $0 \leqslant \dfrac{\pi}{6n+9} < \dfrac{\pi}{6n+6} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et sin est croissante sur $[0,\pi/2]$.

Ainsi les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotonie contraire et donc elles sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $S_{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, nous en déduisons que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Ainsi la série converge.

3) C'est un « piège » : $\dfrac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées donc le terme général de la série n'admet pas de limite. Ainsi la série diverge grossièrement.

Exercice 9 (Constante d'Euler). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et posons $v_n = H_n - \ln(n)$.

1) Quelle est la nature de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) En étudiant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on note γ (et que l'on appelle constant d'Euler).

3) Montrer que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Correction :

1) Elle diverge puisqu'il s'agit de la suite des sommes partielles d'une série de Riemann divergente.
2) On a

$$v_{n+1}-v_n = H_{n+1}-\ln(n+1)-H_n+\ln(n) = \frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$n^2(v_{n+1}-v_n) \underset{+\infty}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{2}+o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}.$$

Ainsi $v_{n+1}-v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n^2}$. Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{3}{2n^2}$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$ converge donc.

Il s'agit d'une série télescopique convergente. Ainsi la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons γ sa limite.
3) Par définition on a, $v_n \underset{+\infty}{=} \gamma+o(1)$ et donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$.

Exercice 10 (Séries de Bertrand). On appelle série de Bertrand toute série de la forme

$$\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}, \qquad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

1) Pour quelles valeurs de (α,β), la série diverge-t-elle grossièrement ?
2) Supposons que $\alpha>1$. Montrer que, pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, la série converge.
3) Supposons que $\alpha<1$. Montrer que, pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, la série diverge.
4) Supposons que $\alpha=1$ et $\beta\leqslant 0$. A l'aide d'une minoration, montrer que la série diverge.
5) Supposons que $\alpha=1$ et $\beta>0$.
   a) Déterminer une primitive de la fonction $f : t\longmapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ sur $]1\,;+\infty[$.
   b) Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Comparer la somme partielle $\sum_{k=2}^{n} f(k)$ et l'intégrale $\int_2^n f(t)\,dt$.
   On pourra utiliser la technique vue en cours pour la nature des séries de Riemann.
   c) En déduire la nature de la série $\sum\frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ en fonction de β.

Correction :

1) Si $\alpha<0$ alors $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par croissances comparées si $\beta>0$ et par quotient si $\beta\leqslant 0$. Dans ce cas la série diverge grossièrement.

   Si $\alpha=0$ et $\beta<0$, alors $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \frac{1}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Dans ce cas la série diverge grossièrement.

   Si $\alpha=0=\beta=0$, alors $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Dans ce cas la série diverge grossièrement.

   Dans tous les autres cas, $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées si $\alpha>0$ et $\beta<0$ et par quotient sinon.
2) Soit $\alpha>1$ et $\beta\in\mathbb{R}$. On a

$$n^{(1+\alpha)/2}\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^{(\alpha-1)/2}(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par croissances comparées si $\beta < 0$, par quotient sinon. Ainsi $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$. Comme $\dfrac{1+\alpha}{2} > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2)}}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge.

3) Soit $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On a

$$n^{(1+\alpha)/2}\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \frac{n^{(1-\alpha)/2}}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

par croissances comparées si $\beta > 0$, par quotient sinon. Ainsi, pour n assez grand, $n^{(1+\alpha)/2}\dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}$. Comme $\dfrac{1+\alpha}{2} < 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{(1+\alpha)/2)}}$ diverge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ diverge.

4) Soit $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. On a, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geqslant \frac{(\ln(2))^{-\beta}}{n}.$$

Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ diverge.

5) Supposons que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

a) Sur $]2,+\infty[$, la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ admet pour primitive $t \longmapsto \dfrac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}$ si $\beta \neq 1$ et $t \longmapsto \ln(\ln(t))$ si $\beta = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. La fonction f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et

$$f' : t \longmapsto -\frac{(\ln(t))^\beta + \beta\ln(t)^{\beta-1}}{t^2(\ln(t))^{2\beta}} = -\frac{\ln(t)+\beta}{t^2(\ln(t))^{\beta+1}}.$$

Ainsi f' est strictement négative et donc f strictement décroissante sur $]2,+\infty[$. Nous en déduisons que, pour tous $k \in [\![2,n]\!]$ et $t \in [k,k+1]$,

$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

donc, par propriété de majoration des intégrales de fonctions continues,

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k).$$

Sommons :

$$\sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

La relation de Chasles entraîne que

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_2^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k).$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^n f(t)\,dt.$$

c) Il y a trois cas à faire :

- Supposons que $\beta > 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_2^n f(t)\,dt = \frac{(\ln(2))^{1-\beta} - (\ln(n))^{1-\beta}}{\beta - 1} \leqslant \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta - 1}.$$

La série est à termes positifs et sa suite des sommes partielles est majorée. Ainsi elle converge.

- Supposons que $\beta < 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt = \frac{(\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}}{1 - \beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc, par encadrement $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi la série diverge

- Supposons que $\beta = 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_2^{n+1} f(t)\,dt = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

donc, par encadrement $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi la série diverge

Exercice 12. A l'aide de la formule de Stirling, donner la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Correction : Commençons par déterminer un équivalent du terme général à l'aide de la formule de Stirling :

$$\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+\gamma}}{a^n} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e}{a}\right)^n n^{\gamma+1/2}.$$

- Si $0 < a < e$, alors $\dfrac{e}{a} > 1$ et donc $n^{\gamma+1/2}\left(\dfrac{e}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées si $\gamma < -1/2$ et par produit sinon. La série diverge alors grossièrement.
- Si $a > e$, alors $0 < \dfrac{e}{a} < 1$ et donc $n^2 n^{\gamma+1/2}\left(\dfrac{e}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées si $\gamma > -3/2$ et par produit sinon. Ainsi

$$n^2 \frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} n^2 n^{\gamma+1/2}\left(\frac{e}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc $\dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} n^2 n^{\gamma+1/2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n} n^2 n^{\gamma+1/2}$ converge.

Exercice 13 (Série géométrique primitivée).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1\,;1[$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2) a) Montrer que

$$\forall x \in [0\,;1[\,, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$

b) Montrer que

$$\forall x \in [-1\,;0[, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$

3) En déduire que, pour tout $x \in [-1\,;1[$, $\sum \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.
4) Écrire une fonction en Python qui prend en argument $x \in [-1\,;1[$ et $\varepsilon > 0$ et qui calcule une valeur approchée de $\ln(1-x)$ à ε près en utilisant les sommes partielles ci-dessus.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1\,;1[$. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} + \frac{t^n}{1-t}.$$

Soit $x \in [-1\,;1[$. On intègre entre 0 et x (ce sont des fonctions continues sur $[0,x]$.

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right)\,dt.$$

Par linéarité de l'intégrale sur un segment :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

2) a) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0\,;1[$ et $t \in [0,x]$, $1-t \geqslant 1-x$ donc $\frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$.
Par propriété de croissances des intégrales sur un segment, en déduit que

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}.$$

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-1\,;0[$ et $t \in [x,0]$, $1-t \geqslant 1$ donc $\left|\frac{t^n}{1-t}\right| = \frac{(-t)^n}{1-t} \leqslant (-t)^n$.
Par inégalité triangulaire puis par propriété de croissances des intégrales sur un segment, en déduit que

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| = \left|\int_x^0 \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \int_x^0 \left|\frac{t^n}{1-t}\right|\,dt \leqslant (-1)^n \int_x^0 t^n\,dt = \int_0^x t^n\,dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)}.$$

3) Comme $|x| \leqslant 1$, $\frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par encadrement, on en déduit que $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x) + 0.$$

Le changement d'indice $j = k+1$ entraîne que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x) + 0.$$

On en déduit que $\sum \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.

Exercice 14. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge.

1) Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de E, alors $\sum u_n v_n$ converge absolument.

   On utilisera (et démontrera) le fait que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ pour tous réels x et y.

2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction :

1) On pense à l'inégalité classique : $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad |u_n v_n| \leqslant \frac{|u_n|^2+|v_n|^2}{2} = \frac{u_n^2+v_n^2}{2}.$$

   Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ converge donc $\sum \dfrac{u_n^2+v_n^2}{2}$ aussi et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n v_n$ converge absolument.

2) Déjà $\sum 0^2$ converge donc la suite nulle appartient à E.
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad (\lambda u_n+v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + v_n^2 + 2\lambda u_n v_n.$$

   Puisque $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent par hypothèse et puisque $\sum u_n v_n$ converge d'après la question précédente, on en déduit que $\sum(\lambda u_n+v_n)^2$ converge. Ainsi $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.

   Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 17 (Règle de Raab-Duhamel). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Supposons qu'il existe $(\alpha,c)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{c}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\ln(n^\alpha u_n)$. Montrer que $n^{3/2}(v_{n+1}-v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   b) En déduire la nature de la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$.
   c) En déduire qu'il existe $\lambda>0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
   d) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.
2) Quelques applications :
   a) Soient x et y deux réels strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+y)u_{n+1}=(n+x)u_n$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
   b) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum x^{H_n}$ où $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la série harmonique.

Correction :

1) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1}-v_n = \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\frac{u_{n+1}}{u_n} &\underset{+\infty}{=} \left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{c}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha^2}{n^2}++\frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} 1+\underbrace{\frac{c-\alpha^2+\alpha(\alpha-1)/2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=x_n}\end{aligned}$$

Comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $n^{3/2}(v_{n+1}-v_n) = \ln(1+x_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{3/2}x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) On a donc $|v_{n+1}-v_n| \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Puisque $\frac{3}{2}>1$, la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |v_{n+1}-v_n|$ converge et donc $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge.

c) Puisque la série télescopique $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons ℓ sa limite. On en déduit que $n^\alpha u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\ell$ par continuité de $\exp$ en ℓ. En notant $\lambda = e^\ell > 0$, on obtient que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

d) La série $\sum \frac{\lambda}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) a) Par récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+x}{n+y} = \frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}} \underset{+\infty}{=} \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}+\frac{y^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) &\underset{+\infty}{=} 1-\frac{y}{n}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{x}{n}-\frac{xy}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\\ &\underset{+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{c}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

avec $\alpha = y-x$ et $c = y^2-xy$. Le critère de Raab-Duhamel entraîne que $\sum u_n$ converge si et seulement si $y-x>1$.

b) Il est immédiat que $u_n = x^{H_n} > 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{H_{n+1}}}{x^{H_n}} = x^{H_{n+1}-H_n} = x^{1/(n+1)} = e^{\ln(x)/(n+1)}.$$

Puisque $\frac{\ln(x)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$e^{\ln(x)/n} \underset{+\infty}{=} 1+\frac{\ln(x)}{n}+\frac{(\ln(x))^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} 1-\frac{\alpha}{n}+\frac{c}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

avec $\alpha = -\ln(x)$ et $c = (\ln(x))^2$. Le critère de Raab-Duhamel entraîne que $\sum_{n\geqslant 2} u_{n-1}$ converge si et seulement si $-\ln(x)>1$. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge si et seulement si $\ln(x) < e^{-1}$.

Exercice 18 (Critère des séries alternées). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante et de limite nulle.

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) En déduire que la série $\sum(-1)^n u_n$ converge et que sa somme S vérifie $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Notons $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Correction :

1) On a $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{n+1} u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par hypothèse. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} < 0$$

et

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} > 0.$$

car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) Les suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite $S \in \mathbb{R}$. Comme $S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $S_{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$, nous en déduisons que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$. Ainsi la série converge. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

3) Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. On a alors

$$|R_n| = |S - S_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \leqslant S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} u_{2p+2} = u_{n+1}$$

Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. On a alors

$$|R_n| = |S - S_{2p}| = S_{2p} - S \leqslant S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} u_{2p+1} = u_{n+1}.$$

Exercice 19. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $\sum a_n$ convergente. Que peut-on dire sur la nature de la série $\sum \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$?

On pourra commencer par majorer le produit.

Correction : Puisque $\sum a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ et donc

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\right) \times \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k\right) \times a_n \leqslant M a_n \qquad \text{avec} \qquad M = \prod_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Puisque $\sum a_n$ converge, la série $\sum M\, a_n$ aussi et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$ converge.

Exercice 20 (Produits infinis). Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$. On appelle produit infini de terme général u_n, et on note $\prod u_n$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel non nul, on dit que le produit $\prod u_n$ est bien convergent et la limite est appelée le produit infini des u_n et noté $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

1) Étudier la convergence du produit infini $(P_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad u_n = e^{-n^2}, \qquad u_n = e^{-1/n^2}.$$

2) Montrer que, si le produit $\prod u_n$ est bien convergent, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers 1.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels de $]0\,;1]$.
   a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel de $[0\,;1]$.
   b) Montrer que les séries $\sum(1-u_n)$ et $\sum \ln(u_n)$ ont la même nature.
   c) En déduire que le produit $\prod u_n$ est bien convergent si et seulement si la série $\sum(1-u_n)$ converge.

Correction :

1) • Supposons que $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le produit n'est pas bien convergent car

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

• Supposons que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le produit n'est pas bien convergent car

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

• Supposons que $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le produit est bien convergent car

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(k+2)\right)\Big/\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)^2$$
$$= \frac{n!(n+2)!/2}{((n+1)!)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

• Supposons que $u_n = e^{-n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le produit n'est pas bien convergent car

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} e^{-k^2} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \exp\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

• Supposons que $u_n = e^{-1/n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Le produit est bien convergent car

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} e^{-1/k^2} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{\pi^2}{6}\right).$$

2) Supposons que le produit infini est bien convergent. Cela signifie que la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite P non nulle. Il s'ensuit que

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{P}{P} = 1.$$

La réciproque est fausse. En effet $u_n = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et pourtant $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) Supposons que $u_n \in\,]0,1]$ pour tout $n \geqslant n_0$.
   a) Pour tout $n \geqslant n_0$, on a alors $P_n > 0$ et $P_{n+1} = u_{n+1}P_n \leqslant P_n$. Ainsi la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante minorée. Nous en déduisons que $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers une réel de $[0, P_1] \subset [0\,;1]$ d'après le théorème de la limite monotone.
   b) • Supposons que la série $\sum(1-u_n)$ converge. Il s'ensuit que $1-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent $-\ln(u_n) = -\ln(1-(1-u_n)) \underset{+\infty}{\sim} 1-u_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, nous en déduisons que $\sum(-\ln(u_n))$ converge. Ainsi $\sum \ln(u_n)$ converge.

- Supposons que la série $\sum \ln(u_n)$ converge. Il s'ensuit que $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc $1-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent $-\ln(u_n) = -\ln(1-(1-u_n)) \underset{+\infty}{\sim} 1-u_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, nous en déduisons que $\sum(1-u_n)$ converge.

Ainsi les séries $\sum(1-u_n)$ et $\sum \ln(u_n)$ ont la même nature.

c) • Supposons que la série $\sum(1-u_n)$ converge. La question précédente entraîne que $\sum \ln(u_n)$ converge. En notant S sa somme, on obtient

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k = \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^S \neq 0.$$

Autrement dit le produit $\prod u_n$ est bien convergent.

- Supposons que le produit $\prod u_n$ est bien convergent. Cela signifie qu'il existe $\ell \in]0,1]$ tel que $\prod_{k=n_0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Ainsi

$$\sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=n_0}^{n} u_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) \in]-\infty, 0].$$

Ainsi la série $\sum \ln(u_n)$ converge et donc la série $\sum(1-u_n)$ également, d'après la question précédente.

Ainsi $\prod u_n$ est bien convergent si et seulement si la série $\sum(1-u_n)$ converge.