Correction de quelques exercices de la feuille de TD 23

Exercice 1 (Vitesses de convergence).

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}e^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Correction :

1) On a l'échelle : $n\ln(n) \quad n^{3/2} \quad \dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}} \quad 2^n\ln(n) \quad \dfrac{3^n}{n^3} \quad +\infty$

En effet

- $\dfrac{n\ln(n)}{n^{3/2}} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n^{3/2})$.
- $\dfrac{n^{3/2}}{n^2/(\ln(n))^{10!}} = \dfrac{(\ln(n))^{10!}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n^{3/2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}\right)$.
- $\dfrac{n^2/(\ln(n))^{10!}}{2^n\ln(n)} = \dfrac{n^2}{2^n}\,\dfrac{1}{(\ln(n))^{10!+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées et par produit. Ainsi $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}} \underset{+\infty}{=} o\left(2^n\ln(n)\right)$.
- $\dfrac{2^n\ln(n)}{3^n/n^3} = n^3\ln(n)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{\ln(n)}{n}\,n^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées et par produit. Ainsi $2^n\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{3^n}{n^3}\right)$.

2) On a l'échelle : $0 \quad \dfrac{n}{4^n} \quad n^{1000}e^{-n} \quad \dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} \quad \dfrac{1}{n^2} \quad \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$

En effet

- $\dfrac{n/4^n}{n^{1000}e^{-n}} = \left(\dfrac{e}{4}\right)^n\dfrac{1}{n^{999}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en tant que produit de deux suites qui convergent vers 0, puisque $0<\dfrac{e}{4}<1$. Ainsi $\dfrac{n}{4^n} = o\left(n^{1000}e^{-n}\right)$.
- $\dfrac{n^{1000}e^{-n}}{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)} = n^{1002}e^{-n}(\ln(n))^{100} = n^{1003}e^{-n}\times\dfrac{(\ln(n))^{100}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n^{1000}e^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}\right)$.
- $\dfrac{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)}{1/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^{100}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- $\dfrac{1/n^2}{(\ln(n))^2/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}\right)$.

Exercice 2. A-t-on $o(x^3) \underset{0}{=} o(x^2)$ ou $o(x^2) \underset{0}{=} o(x^3)$? Même question au voisinage de $+\infty$.

Correction :

- On a $\dfrac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$ et donc $o(x^3) \underset{0}{=} o(x^2)$.
  La réciproque est fausse : par exemple $x^{5/2} \underset{0}{=} o(x^2)$ mais ce n'est pas un $o(x^3)$.
- On a $\dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ donc $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^3)$ et donc $o(x^2) \underset{+\infty}{=} o(x^3)$.
  La réciproque est fausse : par exemple $x^{5/2} \underset{+\infty}{=} o(x^3)$ mais ce n'est pas un $o(x^2)$.

Exercice 4. (★ à ★★) Calculer la limite (si elle existe) des suites de terme général :

1) $n!\sin\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$,
2) $3^n \ln\left(1-e^{-n}\right)$,
3) $\dfrac{\ln(2024n^2+4n+5)}{\ln(n)}$,
4) $n \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)$,
5) $n^2 \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$,
6) $n^2\left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n}\right)$,
7) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$,
8) $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1-\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/n}}$.

Correction :

1) Traitée en cours
2) Traitée en cours
3) On a

$$\frac{\ln(2022n^2+4n+5)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n^2)+\ln\left(2022+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{\ln(n)} = 2 + \frac{\ln\left(2022+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

4) Traitée en cours
5) Traitée en cours
6) Traitée en cours
7) Traitée en cours
8) On a $1-\left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/n} = 1-e^{\ln(1/n^3)/n} = 1-e^{-3\ln(n)/n} \underset{+\infty}{\sim} 3\dfrac{\ln(n)}{n}$, puisque $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   On a aussi $1-\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1-e^{\ln(1/n^2)/n} = 1-e^{-2\ln(n)/n} \underset{+\infty}{\sim} 2\dfrac{\ln(n)}{n}$, puisque $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.
   Ainsi $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1-\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\ln(n)/n}{2\ln(n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5. (★ à ★★) Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$,
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} e^{-1/\sqrt{x}}$,
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}$,
4) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\sin\left(\dfrac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right)$,
5) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\ln(\tan(x))$,
6) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$,
7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{5x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right)$,
8) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+x^2)\left(e^{\cos(1/x)} - e\right)$.

Correction :

1) $(1+x)^{1/x} = e^{\ln(1+x)/x}$. Comme $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ et comme $\exp$ est continue en 1, on obtient que $(1+x)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} e$.

2) $\dfrac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}e^{-1/\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x}e^{-1/\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}e^{-1/\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$

En effet $ue^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

3) Traitée en cours

4) On a $\dfrac{5x^2}{7x^3+3x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{5x^2}{7x^3} = \dfrac{7}{5x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc

$$\sin\left(\frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{7}{5x}$$

et donc

$$x\sin\left(\frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{7}{5} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{7}{5}.$$

5) Traitée en cours

6) On a

$$\ln(1-(1-h))\cos\left(\frac{\pi(1-h)}{2}\right) = \ln(h)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi h}{2}\right) = \ln(h)\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2}h\ln(h),$$

car $\dfrac{\pi h}{2} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$. Par croissances comparées $h\ln(h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$ donc $\ln(1-(1-h))\cos\left(\dfrac{\pi(1-h)}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$ et donc $\ln(1-x)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) tend x 1^- 0$.

7) On a $\dfrac{\sqrt{3x+1}}{7x+4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{3x}}{7x} = \dfrac{\sqrt{3}}{7\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc

$$\sqrt{5x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{5x+1}\left(-\frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{5x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{7\sqrt{x}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

8) Factorisons par e :

$$e^{\cos(1/x)} - e = e\big(e^{\cos(1/x)-1}-1\big) \underset{+\infty}{\sim} e\left(\cos(1/x)-1\right),$$

car $\cos(1/x)-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ensuite

$$e^{\cos(1/x)} - e \underset{+\infty}{\sim} e\left(-\frac{(1/x)^2}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e}{2x^2},$$

car $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Enfin

$$(1+x^2)\big(e^{\cos(1/x)}-e\big) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e(1+x^2)}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{e}{2}.$$

Exercice 6. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $k \in [\![0\,;n-2]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Pour tout $k \in [\![0\,;n-2]\!]$, on a $k! \leqslant (n-2)!$ donc $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
Ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

Nous ne déduisons, par encadrement, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Enfin $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}+\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{k!}{n!}+\frac{1}{n}+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ si bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k! \sim n!$.

Exercice 8.

1) Donner un équivalent de $u_n = -\dfrac{2024}{\pi^n}+o\left(e^{-2n}\right)+o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$ quand $n\to+\infty$.

2) Donner un équivalent de $v_n = \sqrt{2\pi n}-\dfrac{n^3}{\ln(n)}-2024+\ln(n)+2n^3+o(n^3)+o(1)$ quand $n\to+\infty$.

3) Donner un équivalent de $f(x) = 2024+x-o(x)-x^2+o(x^3)+x^4+o(1)$ quand $x\to 0$ puis $x\to+\infty$.

4) Donner un équivalent de $g(x) = \sqrt{x}+o(7x\ln(x))+x^5-5x^5\ln(x)+o(x^5)$ quand $x\to 0$ puis $x\to+\infty$.

Correction :

1) On a $\pi^n e^{-2n} = \left(\dfrac{\pi}{e^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $0<\dfrac{\pi}{e^2}<1$. Par conséquent $e^{-2n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$. Ainsi

$$u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{2022}{\pi^n}+o\left(\frac{1}{\pi^n}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{2022}{\pi^n}+o\left(\frac{2022}{\pi^n}\right)$$

donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2022}{\pi^n}$.

2) *On identifie le terme qui semble être le plus gros : c'est $2n^3$.*

- $\dfrac{\sqrt{2\pi n}}{n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\sqrt{2\pi n}\underset{+\infty}{=}o(n^3)$.
- $-\dfrac{n^3}{\ln(n)}\dfrac{1}{n^3} = \dfrac{-1}{\ln(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $-\dfrac{n^3}{\ln(n)}\underset{+\infty}{=}o(n^3)$.
- $\dfrac{2022+o(1)}{n^3}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $2022+o(1)\underset{+\infty}{=}o(n^3)$.
- Par croissances comparées donc $\ln(n)\underset{+\infty}{=}o(n^3)$.

Ainsi $u_n\underset{+\infty}{=}2n^3+o(n^3)\underset{+\infty}{=}2n^3+o(2n^3)$ donc $u_n\underset{+\infty}{\sim}2n^3$.

3) On a $x-o(x)-x^2+o(x^3)+x^4+o(1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ donc $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}2022$ et donc $f(x)\underset{0}{\sim}2022$.

On a $x\underset{+\infty}{=}o(x^4)$, $x^2\underset{+\infty}{=}o(x^4)$ et $1\underset{+\infty}{=}o(x^4)$ donc $f(x)\underset{+\infty}{=}x^4+o(x^4)$ et donc $f(x)\underset{+\infty}{\sim}x^4$.

4) *On identifie le terme qui semble être le plus gros au voisinage de 0^+ : c'est $\sqrt{x}$.*

- $\dfrac{7x\ln(x)}{\sqrt{x}} = 7\sqrt{x}\ln(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées donc $7x\ln(x)\underset{0^+}{=}o(\sqrt{x})$.
- $x^5\underset{0^+}{=}o(\sqrt{x})$.
- $\dfrac{-5x^5\ln(x)}{\sqrt{x}} = -5x^{9/2}\ln(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées donc $-5x^5\ln(x)\underset{0^+}{=}o(\sqrt{x})$.

Ainsi $g(x)\underset{0^+}{=}\sqrt{x}+o(\sqrt{x})$ donc $g(x)\underset{0^+}{\sim}\sqrt{x}$.

On identifie le terme qui semble être le plus gros au voisinage de $+\infty$: c'est $-5x^5\ln(x)$.

- $\dfrac{7x\ln(x)}{-5x^5\ln(x)} = \dfrac{-7}{5x^4}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées donc $7x\ln(x)\underset{+\infty}{=}o(-5x^5\ln(x))$.
- $x^5\underset{+\infty}{=}o(-5x^5\ln(x))$ par quotient.
- $\dfrac{\sqrt{x}}{-5x^5\ln(x)} = \dfrac{-1}{5x^{9/2}\ln(x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\sqrt{x}\underset{+\infty}{=}o(-5x^5\ln(x))$.

Ainsi $g(x)\underset{+\infty}{=}-5x^5\ln(x)+o(-5x^5\ln(x))$ donc $g(x)\underset{+\infty}{\sim}-5x^5\ln(x)$.

Exercice 9. (★ à ★★) Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n - 4\ln(n)$,
2) $\sqrt{n^2+3n}-n$,
3) $\dfrac{n^{100!}-10\,n!+100^n}{10n+\sin(n)+\sqrt{n}\ln(n)+n^{100}e^{-n}}$,
4) $\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right)$,
5) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{8n^5-n^2+6}}$,
6) $\sin\left(\sqrt{\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}}\right)$,
7) $\dfrac{1}{n}+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
8) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{3^k}$,
9) $n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$,
10) $\dfrac{\ln(n)}{n+1}-\dfrac{\ln(n+1)}{n}$.

Correction :

1) Par croissances comparées $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$ donc $\pi n - 4\ln(n) \underset{+\infty}{=} \pi n + o(n) \underset{+\infty}{\sim} \pi n$.

2) Traitée en cours.

3) On a $n^{100!} \underset{+\infty}{=} o(100^n)$ et $100^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$ donc $n^{100!} \underset{+\infty}{=} o(n!)$ et donc $n^{100!}-10\,n!+100^n \underset{+\infty}{=} -10n!+o(n!) \underset{+\infty}{\sim} -10n!$. Ensuite
   - $\dfrac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par encadrement donc $\sin(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$.
   - $\dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $\sqrt{n}\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$.
   - $\dfrac{n^{100}e^{-n}}{n} = n^{99}e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $n^{100}e^{-n} \underset{+\infty}{=} o(n)$.

   Ainsi $10n+\sin(n)+\sqrt{n}\ln(n)+n^{100}e^{-n} \underset{+\infty}{=} 10n+o(n) \underset{+\infty}{\sim} 10n$. Finalement

$$\frac{n^{100!}-10\,n!+100^n}{10n+\sin(n)+\sqrt{n}\ln(n)+n^{100}e^{-n}} \underset{+\infty}{=} \frac{-10n!}{10n} = -(n-1)!.$$

$=$

4) On a $3e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\tan\left(3e^{-n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = \cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi

$$\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right) = \ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n.$$

   Ensuite $u_n \underset{+\infty}{\sim} \tan\left(3e^{-n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 3e^{-n}$. Finalement

$$\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right) = \ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} 3e^{-n}.$$

5) On a $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{8n^5-n^2+6}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-3n^2}{\sqrt[3]{8n^5}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-3n^2}{2n^{5/4}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{3n^{3/4}}{2}$.

6) On a $\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n^2}{3n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\sin\left(\frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3n}.$$

   Ainsi $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

7) Traitée en cours.

8) Traitée en cours.

9) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = n\left(1-\sqrt[4]{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = -n\left(\sqrt[4]{1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}-1\right).$$

Puisque $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$n - \sqrt[4]{n^4\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} -n\frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{4}\frac{1}{2n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{8n}.$$

Et donc $n - \sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10) Traitée en cours.

Exercice 10. (★ à ★★) Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en 0^+.
2) $x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.
3) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\ln(x))$ en 1.
4) $x \longmapsto (x^4-3x^2+7)e^{1/x}$ en $+\infty$,
5) $x \longmapsto \sqrt[7]{x}-1$ en 1,
6) $\ln(3-x)-\ln(\sqrt{5}-x)$ en $-\infty$,
7) $x \longmapsto 1-2x^4+9x^3\cos(x)+7x^5\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$,
8) $x \longmapsto \sqrt{6+x}-3$ en 3,
9) $x \longmapsto \dfrac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}}$ en 0^+ puis en $+\infty$,
10) $x \longmapsto \ln(2\sin(x))$ en $\dfrac{\pi}{6}$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) On a $(x^4-3x^2+7)e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} x^4\times 1 = x^4$.
5) Traitée en cours.
6) Traitée en cours.
7) Traitée en cours.
8) On a $\sqrt{6+h+3}-3 = \sqrt{9+h}-3 = 3\left(\sqrt{1+\dfrac{h}{9}}-1\right) \underset{h\to0}{\sim} 3\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{h}{9} = \dfrac{h}{6}$.

   Ainsi $\sqrt{6+x}-3 \underset{x\to3}{\sim} \dfrac{x-3}{6}$.
9) • On a $x^2 \underset{0^+}{=} o(\ln(x))$ par quotient donc $x^2+\ln(x) \underset{0^+}{=} \ln(x)+o(\ln(x))$. On a aussi $xe^{-x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{5}$.
   • On a $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ par croissances comparées donc $x^2+\ln(x) \underset{+\infty}{=} x^2+o(x^2)$. On a aussi $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $\dfrac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{5}$.

10) Pour tout h au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\ln\left(2\sin\left(h+\pi/6\right)\right) &= \ln\left(2\sin(h)\cos(\pi/6)+2\cos(h)\sin(\pi/6)\right)\\ &= \ln\left(\sqrt{3}\sin(h)+\cos(h)\right) = \ln\left(1+u(h)\right),\end{aligned}$$

avec $u(h) = \sqrt{3}\sin(h)+\cos(h)-1$. On a $\cos(h)-1 \underset{h\to0}{\sim} -\dfrac{h^2}{2} \underset{h\to0}{=} o(h)$ et $\sin(h) \underset{h\to0}{\sim} h$. Ainsi $u(h) = \sqrt{3}h+o(h) \underset{h\to0}{\sim} \sqrt{3}h$.

Comme $u(h) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln\left(2\sin\left(h+\pi/6\right)\right) \underset{h\to0}{\sim} u(h) \underset{h\to0}{\sim} \sqrt{3}h$.

Finalement $\ln(2\sin(x)) \underset{x\to\pi/6}{\sim} u(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Autre méthode : puisque $2\sin(x)-1 \xrightarrow[x\to\pi/6]{} 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\ln(2\sin(x)) = \ln(1+2\sin(x)-1) \underset{x\to\pi/6}{\sim} 2\sin(x)-1 = 2\left(\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ = 4\cos\left(\frac{x+\pi/6}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \\ \underset{x\to\pi/6}{\sim} 4\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{x-\pi/6}{2} = \sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Exercice 11. A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha},\quad \alpha>0, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3}, \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

Correction :

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = n^{\alpha+1}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}.$$

La fonction $x\longmapsto x^{\alpha}$ est continue sur $[0\,;1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x^{\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3(1+2k/n)^3} = \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3(1+2k/n)^3}.$$

La fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{(1+2x)^3}$ est continue sur $[0\,;1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3(1+2k/n)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\frac{dx}{(1+2x)^3} = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(1+2x)^{-3+1}}{-3+1}\right]_0^1 = -\frac{3^{-2}}{4}+\frac{1}{4} = \frac{2}{9}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3} \sim \frac{2}{9n^2}$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) = n^2\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$

La fonction $x\longmapsto x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ est continue sur $[0\,;1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\pi}{2}2x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) \sim \frac{n^2}{\pi}$.

Exercice 12 (D'après l'oral ESCP 2006). A l'aide du théorème d'encadrement et d'un équivalent usuel, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right).$$

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

puisque, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $1+\dfrac{\ln(k)}{n^2}\leqslant 1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc

$$0\leqslant\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right)\leqslant n\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(n)}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}n\dfrac{\ln(n)}{n^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(n)}{n}$ et donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ encore par croissances comparées.

Par encadrement, nous en déduisons que $\ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Enfin, par continuité de $\exp$ en 0, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

Exercice 14.

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution dans $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2}\,;n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.
2) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui renvoie une approximation de x_n à 10^{-4} près.
3) Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $y_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n$.
   a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $y_n=\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
   b) En déduire un équivalent simple de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Montrer que $x_n\underset{n\to+\infty}{=}a_n+b_n+o\left(b_n\right)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites que l'on précisera.

Correction :

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f:x\longmapsto\tan(x)-x$ est dérivable sur $I_n=\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2}\,;n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x\in I_n,\qquad f'(x)=1+\tan^2(x)-1=\tan^2(x).$$

Ainsi f' est strictement positif sur I_n sauf en $n\pi$. Nous en déduisons que f est strictement croissante sur I_n. Le théorème de la bijection entraîne alors que f est une bijection de I_n dans $f(I_n)=\left]\displaystyle\lim_{(n\pi-\frac{\pi}{2})^+}f\,;\lim_{(n\pi+\frac{\pi}{2})^-}f\right[=\mathbb{R}$.

Il existe donc un unique $x_n\in I_n$ tel que $f(x_n)=0$. Autrement dit l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution x_n dans $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{2}\,;n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) On utilise la méthode de la dichotomie.

```python
import numpy as np
def suite(n):
    a=n*np.pi-np.pi/2
    b=a+np.pi
    while b-a>10**(-4):
        c=(a+b)/2
        if np.tan(c)-c>0:#L'antécédent de 0 est donc "avant c"
            b=c
        else:
            a=c
    return a
```

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi - \dfrac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $1 - \dfrac{1}{2n} < \dfrac{x_n}{n\pi} < 1 + \dfrac{1}{2n}$. Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\mathrm{Arctan}(\tan(u)) = u$ uniquement lorsque $u \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Heureusement $\tan$ est π-périodique.

On a $\tan(x_n) = x_n$. Puisque $\tan$ est π périodique, on a $\tan(x_n - n\pi) = x_n$. Puisque $x_n - n\pi \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$, il s'ensuit que

$$x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(\tan(x_n - n\pi)) = \mathrm{Arctan}(x_n).$$

Puisque $x_n > 0$ (car $n \geqslant 1$), on en déduit que

$$x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(\tan(x_n - n\pi)) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

et donc $y_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.

b) On a $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$y_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

c) On en déduit que $y_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$. Ainsi

$$x_x = \frac{\pi}{2} + n\pi - y_n \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} + n\pi - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{=} a_n + b_n + o\left(b_n\right),$$

avec $a_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ et $b_n = -\dfrac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.

2) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui renvoie une approximation de x_n à 10^{-4} près.

3) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.

c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1) Le fonction $f : x \longmapsto x + \sqrt[3]{x}$ est continue est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ (comme somme de deux fonctions qui le sont). On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection entraîne donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui même. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$, tel que $n = f(x_n)$.

2) On utilise la méthode de la dichotomie. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(0) = 0 \leqslant n$, $f(n) = n + \sqrt[3]{n} \geqslant n$ donc $x_n \in [0\,;n]$. De plus f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

```
def suite(n):
    if n==0:
        return 0
    else:
        a=0
        b=n
        while b-a>10**(-4):
            c=(a+b)/2
            if c+c**(1/3)>n:#L'antécédent de n est donc "avant c"
                b=c
            else:
                a=c
        return a
```

3) On a $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, pour n assez grand, $x_n > 0$ et

$$\frac{n}{x_n} = 1 + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n} = 1 + \frac{1}{x_n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = y_n + n$ donc $y_n + \sqrt[3]{y_n + n} = 0$ et donc, en divisant par $\sqrt[3]{n}$ pour $n \geqslant 1$, on obtient

$$\frac{y_n}{\sqrt[3]{n}} = -\sqrt[3]{1 + \frac{y_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$$

car $\dfrac{y_n}{n} = \dfrac{x_n}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$z_n = y_n + \sqrt[3]{n} = x_n - n + \sqrt[3]{n} = -\sqrt[3]{x_n} + \sqrt[3]{n} = -\sqrt[3]{n + y_n} + \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(1 - \sqrt[3]{1 + \frac{y_n}{n}}\right).$$

Or $\dfrac{y_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2/3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$z_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{3}\frac{y_n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{n}}{3n^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}.$$

c) On a $x_n = y_n + n = n + z_n - \sqrt[3]{n} \underset{+\infty}{=} n - \sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

I Calculs de développements limités

Exercice 16. (★ à ★★) Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué. On montrera que ces fonctions sont dérivables en 0 et on précisera leur dérivée en 0.

1) $x \longmapsto \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[6]{1+4x}$ à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 6,
3) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 5,
4) $x \longmapsto x\, e^{x^2}\sin(x)$ à l'ordre 4,
5) $x \longmapsto (1+x^2)\cos(x)$ à l'ordre 6,
6) $x \longmapsto \ln(1-x^2) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
7) $x \longmapsto \cos(x)\sqrt[5]{1+x}$ à l'ordre 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 4,
9) $x \longmapsto \dfrac{2}{1-x+x^3}$ à l'ordre 5,
10) $x \longmapsto e^{(1-x)^2}$ à l'ordre 3,
11) $x \longmapsto \ln(1+x-x^3)$ à l'ordre 4,
12) $x \longmapsto \cos(x-x^2)$ à l'ordre 5,
13) $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{1+3x+x^2}$ à l'ordre 5,
14) $x \longmapsto (\ln(1-x))^3$ à l'ordre 6,
15) $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9,
16) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4,
17) $x \longmapsto e^{-1/x^4}$ à l'ordre 2024.
18) $x \longmapsto \dfrac{\tan(3x)\ln(1+2x)}{2x+2x^2}$ à l'ordre 3.

Correction : A chaque question, notons f la fonction dont on cherche le DL.

1) On trouve $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{20x^3}{9} + o(x^3)$.
2) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$.
3) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.
4) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x^2 + \dfrac{5x^4}{6} + o(x^6)$.
5) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{11x^4}{24} + \dfrac{29x^6}{720} + o(x^6)$.
6) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -2 - \dfrac{7x^4}{12} + o(x^4)$.
7) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{29x^2}{50} - \dfrac{13x^3}{250} + o(x^3)$.
8) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{8} + o(x^4)$,
9) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 2 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - 4x^5 + o(x^5)$.
10) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -2ex + 3ex^2 - \dfrac{10e}{3}x^3 + o(x^3)$.
11) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{4} + o(x^4)$.
12) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3 - \dfrac{11x^4}{24} - \dfrac{x^5}{6} + o(x^5)$.
13) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - 3x + 7x^2 - 18x^3 + \dfrac{142x^4}{3} - 124x^5 + o(x^5)$.
14) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -x^3 - \dfrac{3x^4}{2} - \dfrac{7x^5}{4} - \dfrac{15x^6}{8} + o(x^6)$.
15) Détaillons : puisque le premier terme du développement limité de $\sin(x)$ est x, il suffit d'aller à l'ordre 3 dans celui de $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. On a $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)$ donc

$$\sin^6(x) = x^6\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^6 \underset{0}{=} x^6\left(\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^6 + o(x^3)\right) \underset{0}{=} x^6\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{x^2}{6}\right)^k + o(x^3)\right)$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi

$$f(x) \underset{0}{=} x^6(1-x^2+o(x^3)) \underset{0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9).$$

16) Détaillons : On a $x - x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}\ln(1+x-x^3) &\underset{0}{=} (x-x^3) - \frac{(x-x^3)^2}{2} + \frac{(x-x^3)^3}{3} - \frac{(x-x^3)^4}{4} + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} x - x^3 - \frac{x^2-2x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4).\end{aligned}$$

On a $-x+2x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x+2x^2}} = (1-x+2x^2)^{1/2} &\underset{0}{=} 1 - \frac{-x+2x^2}{2} + \frac{3(-x+2x^2)^2}{8} - \frac{5(-x+2x^2)^3}{16} + \frac{35(-x+2x^2)^4}{128} + o(x^4) \\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{-x+2x^2}{2} + \frac{3x^2-12x^3}{8} - \frac{-5x^3}{16} - \frac{35x^4}{128} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{19x^3}{16} - \frac{13x^4}{128} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\ln(1+x-x^2)}{\sqrt{1-x+2x^2}} &= (x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4})(1 + \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{19x^3}{16} - \frac{13x^4}{128}) + o(x^3) \\ &= x - \frac{37x^3}{24} - \frac{11x^4}{24} + o(x^4)\end{aligned}$$

17) On trouve $f(x) \underset{0}{=} o(x^{2022})$.

18) Pour tout x au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{\tan(3x)\ln(1+2x)}{2x(1+x)} = \dfrac{\tan(3x)}{x} \times \dfrac{\ln(1+2x)}{2} \times \dfrac{1}{1+x}$. On a

- $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\tan(3x) \underset{0}{=} 3x + \dfrac{(3x)^3}{3} + o(x^4) \underset{0}{=} 3x + 9x^3 + o(x^4)$. Ainsi $\dfrac{\tan(3x)}{x} \underset{0}{=} 3 + 9x^2 + o(x^3)$.
- $\ln(1+2x) = 2x - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3} + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8x^3}{3} + o(x^3)$ et donc $\ln(1+2x) = x - x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + o(x^3)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.

Il fallait aller à l'ordre 4 dans l'ordre de $\tan(3x)$ pour, en divisant par x, obtenir un ordre 3. On aurait aussi pu diviser $\ln(1+2x)$ par x (au lieu de $\tan(3x)$) et aller à l'ordre 4 mais cela aurait été plus compliqué. On aurait aussi pu faire tout le DL à l'ordre 4 et diviser à la toute fin par x mais cela aurait été très fastidieux (un terme en plus pour rien !).

Par conséquent

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{0}{=} (3+9x^2)\left(x - x^2 + \frac{4x^3}{3}\right)(1-x+x^2-x^3) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} (3x - 3x^2 + 4x^3 + 9x^3 + o(x^3))(1-x+x^2-x^3) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} (3x - 3x^2 + 13x^3)(1-x+x^2-x^3) + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} (3x - 3x^2 + 13x^3) - (3x^2 - 3x^3) + 3x^3 + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 3x - 3x^2 + 13x^3 - 3x^2 + 3x^3 + 3x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

donc $f(x) \underset{0}{=} 3x - 6x^2 + 19x^3 + o(x^3)$.

Exercice 17. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :

$$1)\ x \longmapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad 2)\ x \longmapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2x}, \quad 3)\ x \longmapsto (1-x)\sin(x), \quad 4)\ x \longmapsto x\cos(x)-\sin(x).$$

Correction :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

donc

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

On remarque que, dans la somme, seuls les termes d'indice pair sont présents. Il vient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{2} \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o(x^{2n}).$$

2) D'après la question précédente,

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1-(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

On remarque que, dans la somme, seuls les termes d'indice impair sont présents. Il vient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2} \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+1})$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2x} \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j+1)!} + o(x^{2n}).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+3}).$$

Ainsi

$$(1-x)\sin(x) = \sin(x) - x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}-x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j)!} + o(x^{2n+2}).$$

Ainsi

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right) x^{2j+1} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{2jx^j}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Exercice 18. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ afin que $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} o(x^2)$.

Correction : On a $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ et

$$\frac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} (1+ax)\left(1 - bx + b^2x^2 + o(x^2)\right) \underset{0}{=} 1-bx+b^2x^2+ax-abx^2+o(x^2) \underset{0}{=} 1+(a-b)x+b(b-a)x^2+o(x^2).$$

Si on prend a et b tels que $a - b = 1$ et $b(b-a) = \dfrac{1}{2}$, autrement dit $b = \dfrac{-1}{2}$ et $a = 1 + b = \dfrac{1}{2}$, alors $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} o(x^2)$.

Exercice 19. Déterminer les développements limités suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3,

2) $x \longmapsto \ln(2+x)$ en -1 à l'ordre 5,

3) $x \longmapsto \cos(2x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 6,

4) $x \longmapsto 3 - \sqrt{5-2x} - x$ en 2 à l'ordre 3.

Correction :

1) On a $\dfrac{\ln(1+h)}{1+h} \underset{h\to 0}{=} \left(h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3}\right)\left(1 - h + h^2 - h^3\right) + o(h^3) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{3h^2}{2} + \dfrac{11h^3}{6} + o(h^3)$. Ainsi

$$\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \frac{3(x-1)^2}{2} + \frac{11(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3)$$

2) On a $\ln(2 + (-1+h)) = \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + \dfrac{h^5}{5} + o(h^5)$. Ainsi

$$\ln(2+x) = \underset{x\to -1}{=} (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^4}{4} + \frac{(x+1)^5}{5} + o((x+1)^5).$$

3) On a $\cos\left(2\left(h + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(2h + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(2h) \underset{h\to 0}{=} -2h + \dfrac{8h^3}{6} - \dfrac{32h^5}{120} + o(h^6)$. Ainsi

$$\cos(2x) \underset{x\to\pi/4}{=} -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6\right))$$

4) On a

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{5 - 2(h+2)} - (h+2) = 1 - \sqrt{1-2h} - h &\underset{h\to 0}{=} 1 - h - \left(1 + \frac{1}{2}(-2h) - \frac{(-2h)^2}{8} + \frac{(-2h)^3}{16} + o(h^3)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3). \end{aligned}$$

Ainsi $3 - \sqrt{5-2x} - x \underset{x\to 2}{=} \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(x-2)^3}{2} + o((x-2)^3)$.

Exercice 20 ($\mathrm{DL}(0)$ de $\tan$). En utilisant l'exercice 5 de la feuille d'exercice n° 20, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Correction : La fonction $\tan$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. On a vu en exercice (cf. feuille de TD n° 20) que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

On a $a_0 = 0$, $a_1 = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$. Ensuite

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0a_1 + a_1a_0) = 0, \qquad a_3 = \frac{1}{3}(a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0) = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{1}{4}(a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0) = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{5}(a_0a_4 + a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1 + a_4a_0) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15},$$
$$a_6 = \frac{1}{6}(a_0a_5 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 + a_5a_0) = 0,$$
$$a_7 = \frac{1}{7}(a_0a_6 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_3^2 + a_4a_2 + a_5a_1 + a_6a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15}\right) = \frac{17}{315}.$$
$$a_8 = \frac{1}{8}(a_0a_7 + a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_4 + a_4a_3 + a_5a_2 + a_6a_1 + a_7a_0) = 0.$$

D'où le résultat d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 8.

Exercice 21 ($\mathrm{DL}(0)$ de Arctan). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant x^{2n+2}\,\mathrm{Arctan}(x).$$

3) En déduire que

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Correction :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

On a utilisé $\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{n} y^k + \frac{y^{n+1}}{1-y}$ *avec* $y = -x^2$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $t \in [0\,;x]$, on a $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant \frac{x^{2n+2}}{1+t^2}$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \int_0^x \frac{x^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = x^{2n+2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x^{2n+2}\,\mathrm{Arctan}(x).$$

3) Intégrons la formule de la question 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \mathrm{Arctan}'(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right)dt.$$

Par linéarité :

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}(x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^x t^{2k}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\underbrace{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt}_{=u_n(x)}.\end{aligned}$$

On a vu que, si $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant x^{2n+2}\,\mathrm{Arctan}(x)$. Par imparité, si $x \in \mathbb{R}_-$, $x^{2n+2}\,\mathrm{Arctan}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant 0$. Par encadrement, on obtient que $\frac{(-1)^{n+1}u_n(x)}{x^{2n+2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Autrement dit $(-1)^{n+1}u_n(x) \underset{0}{=} o(x^{2n+2})$. D'où le développement limité.

Exercice 22. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)}{x^2}.$$

Correction : Étant donné le terme x^2 au dénominateur, on est poussé à déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ du numérateur. Puisque f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young entraîne que

$$f(h)\underset{t\to 0}{=}f(0)+hf'(0)+f''(0)\frac{h^2}{2}+\left(h^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)\\&\underset{x\to 0}{=}\left(f(0)+5xf'(0)+f''(0)\frac{(5x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-3\left(f(0)+4xf'(0)+f''(0)\frac{(4x)^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\&\qquad+7\left(f(0)+xf'(0)+f''(0)\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)-5f(0)\\&=15f''(0)x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)}{x^2}=15f''(0)$.

Exercice 23. Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

1) $x\longmapsto e^x-e^{-x}-2x$,
2) $x\longmapsto e^{x^2}-\cos(x)$,
3) $x\longmapsto x+\mathrm{Arctan}(x)-2\sin(x)$,
4) $x\longmapsto \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2\right)$,
5) $x\longmapsto \dfrac{1}{x\ln(1+x)}-\dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

Correction :

1) Traité en cours.

2) $e^{x^2}\underset{0}{=}1+x^2+o(x^2)$ et $\cos(x)\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc $e^{x^2}-\cos(x)=x^2+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ et donc $e^{x^2}-\cos(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{3x^2}{2}$.

3) Traité en cours.

4) $\sqrt[3]{1+x^2}\underset{0}{=}1+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\dfrac{x^4}{2!}+o(x^4)\underset{0}{=}1+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^4}{9}+o(x^4)$

   et $\sqrt[3]{1-x^2}\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}-1\right)\dfrac{x^4}{2!}+o(x^4)\underset{0}{=}1-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^4}{9}+o(x^4)$

   donc $\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2\underset{0}{=}-\dfrac{2x^4}{9}+o(x^4)$ et donc $\sqrt[3]{1+x^2}+\sqrt[3]{1-x^2}-2\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{-2x^3}{9}$.

5) Traité en cours.

Exercice 24. Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1) $4\sqrt{n(1+4n)}-8n-1$,
2) $3n-2n\cos\left(n^{-3/2}\right)-\sqrt[3]{3+n^3}$,
3) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
4) $e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,
5) $-2+(2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Correction :

1) On a $\sqrt{n(1+4n)}=\sqrt{n+4n^2}=2n\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}}\underset{+\infty}{=}2n\left(1+\dfrac{1}{8n}-\dfrac{1}{8\times 4^2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

   donc $4\sqrt{n(1+4n)}-8n-1\underset{+\infty}{=}8n+1-\dfrac{1}{16n}-8x-1+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et donc $4\sqrt{n(1+4n)}-8n-1\underset{+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{16n}$.

2) Traité en cours.

3) On a

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n + u_n\right) = \sin(\pi n)\cos(u_n)+\cos(\pi n)\sin(u_n) = 0+(-1)^n\sin(u_n).$$

où $u_n = \pi n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) \underset{+\infty}{=} \pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on a

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n\frac{\pi}{2n}$$

4) Pour tout $n \geqslant 1$, $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\ln(1+1/n)} = e\left(1-e^{n\ln(1+1/n)-1}\right)$.

Ensuite $u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 \underset{+\infty}{\sim} n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} -eu_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$.

5) *Attention il y a à la fois du n et du $\frac{1}{n}$. Il faut donc penser au préalable qu'il va falloir à aller à l'ordre $k+1$ dans le développement du logarithme si on veut de l'ordre k à la fin. Allons tout de suite à l'ordre 3 (pour avoir un ordre 2).*

$$\begin{aligned}
-2+(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} -2+(2n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{+\infty}{=} -2+2-\frac{1}{n}+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cancel{\frac{1}{3n^3}}+o\left(\cancel{\frac{1}{n^3}}\right)\\
&\underset{+\infty}{=} \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

D'où $-2+(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^2}$.

Exercice 25. Déterminer les limites en 0 (si elles existent) des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \frac{1}{x}-\frac{e^x}{\ln(1+x)}$, 2) $x \longmapsto \frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$, 3) $x \longmapsto \frac{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)}$.

Correction :

1) On a $\frac{1}{x}-\frac{e^x}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-xe^x}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{\ln(1+x)-xe^x}{x^2}$.

On a $\ln(1+x)-xe^x \underset{0}{=} x-\frac{x^2}{2}-x(1+x)+o(x^2) \underset{0}{=} -\frac{3x^2}{2}+o(x^2)$.

Ainsi $\frac{1}{x}-\frac{e^x}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{-3x^2/2}{x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{3}{2}$.

2) On a

$$\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)} = \frac{2(1-\cos(x))-\sin^2(x)}{\sin^2(x)(1-\cos(x))} \underset{0}{\sim} \frac{2(1-\cos(x))-\sin^2(x)}{x^4/2}.$$

Allons au moins à l'ordre 4 au numérateur (on voit bien que le terme d'ordre 2 est nul) :

- $2(1-\cos(x)) \underset{0}{=} x^2-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$,
- $\sin(x) \underset{0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+o(x^4) \underset{0}{=} x^2-2x\frac{x^3}{6}+o(x^4) \underset{0}{=} x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$.

Ainsi $2(1-\cos(x))-\sin^2(x) \underset{0}{=} -\frac{x^4}{12}+\frac{x^4}{3}+o(x^4) \xrightarrow[x\to0]{} \frac{x^4}{4}$ et donc $\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x^4/4}{x^4/2} = \frac{1}{2}$.

3) On a

$$\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}=(1+2x)^{1/5}-(1-3x)^{1/7}\underset{0}{=}1+\frac{2x}{5}+o(x)-\left(1+\frac{-3x}{7}+o(x)\right)\underset{0}{=}\frac{29x}{35}+o(x).$$

Ainsi $\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{29x/35}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\dfrac{29}{35}$.

Exercice 26.

1) Montrer que la fonction $f: x\longmapsto\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que f ainsi prolongée est dérivable sur $I=]-\pi\,;\pi[$.
2) Montrer que f de classe C^1 (et même deux fois dérivable) sur $I=]-\pi\,;\pi[$.
On pourra chercher un équivalent de $f'-f'(0)$ au voisinage de 0.
3) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à $\mathscr{C}_f$ et en donner la position relative.

Correction :

1) Déjà f est dérivable sur $]-\pi\,;0[\cup]0\,;\pi[$ puisque $\sin$ et $x\longmapsto x$ le sont et ne s'annulent pas. Ensuite

$$\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}\underset{0}{\sim}\frac{x^3/6}{x^2}=\frac{x}{6}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Ensuite $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{0}{\sim}\dfrac{1}{6}\xrightarrow[x\to0]{}\dfrac{1}{6}$ donc f est dérivable en 0 avec $f'(0)=\dfrac{1}{6}$.

2) Pour tout $x\in I\backslash\{0\}$,

$$f'(x)-f'(0)=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}=\frac{-6x^2\cos(x)+6\sin^2(x)-x^2\sin^2(x)}{6x^2\sin^2(x)}.$$

On a $6x^2\sin^2(x)\underset{0}{\sim}6x^4$. Allons donc à l'ordre 6 au numérateur :

- $-6x^2\cos(x)\underset{0}{=}-6x^2+3x^4-\dfrac{x^6}{4}+o(x^6)$
- $$6\sin^2(x)\underset{0}{=}6\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2+o(x^6)\underset{0}{=}6\left(x^2+\frac{x^6}{36}-2x\frac{x^3}{6}+2x\frac{x^5}{120}\right)+o(x^6)$$
$$\underset{0}{=}6x^2+\frac{x^6}{6}-2x^4+\frac{x^6}{10}+o(x^6)$$
$$\underset{0}{=}6x^2-2x^4+\frac{4x^6}{15}+o(x^6)$$
- $-x^2\sin^2(x)\underset{0}{=}-x^2\left(x^2-\dfrac{x^4}{3}\right)+o(x^6)\underset{0}{=}-x^4+\dfrac{x^6}{3}+o(x^6)$.

Ainsi

$$-6x^2\cos(x)+6\sin^2(x)-x^2\sin^2(x)\underset{0}{=}x^6\left(-\frac{1}{4}+\frac{4}{15}+\frac{1}{3}\right)+o(x^6)\underset{0}{=}\frac{7x^6}{20}+o(x^6)$$

et donc $f'(x)-f'(0)\underset{0}{\sim}\dfrac{7x^6/20}{6x^4}=\dfrac{7x^2}{120}$. Nous en déduisons que $f'(x)=\dfrac{1}{6}+o(x)$ et donc f' admet un $\mathrm{DL}_1(0)$. Par conséquent f' est dérivable en 0 donc f' est continue sur I et donc f est de classe C^1 sur I.

3) On a $f(x)-(f(0)+f'(0)x)=f(x)-\dfrac{x}{6}=\dfrac{6(x-\sin(x))-x^2\sin(x)}{6x\sin(x)}=\dfrac{x^3-x^5/20-x^3+x^5/6+o(x^6)}{6x\sin(x)}$ donc $f(x)-(f(0)+f'(0)x)\underset{0}{\sim}\dfrac{7x^5/60}{6x^2}\underset{0}{\sim}\dfrac{7x^3}{360}$. Nous en déduisons que la courbe représentative de f est en dessous sa tangente au voisinage de 0^- et au dessus de sa tangente au voisinage de 0^+.

II Développements asymptotiques et étude d'asymptotes

Exercice 27 (Arctan au voisinage de $+\infty$).

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2) Donner le développement asymptotique de $x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ à l'ordre 8 en $+\infty$.

   On utilisera le DL *de* Arctan *en* 0 *déterminé plus tôt dans cette feuille d'exercice.*

3) Montrer que la courbe représentative de $x \longmapsto (x+1)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x)$ admet des asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation (on précisera la position de la courbe par rapport à ces deux asymptotes au voisinage de $+\infty$).

4) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\big(\operatorname{Arctan}(nu_n)\big)^n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n e^{-\pi/(2\ell)}.$$

Correction :

1) La fonction $\varphi : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

Ainsi φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) &\underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^4} - \frac{1}{5x^6} + \frac{1}{7x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right).\end{aligned}$$

3) On a $\operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ensuite

$$\begin{aligned}(1+x)e^{1/x} \underset{+\infty}{=} (1+x)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) &\underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + +x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} 2 + x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(1+x)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x) &\underset{+\infty}{=} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)\left(2 + x + \frac{3}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \pi - 1 + \frac{\pi x}{2} + \frac{3\pi - 8}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$(1+x)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x) - \left(\pi - 1 + \frac{\pi x}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3\pi - 8}{4x}.$$

Nous en déduisons que la courbe de $x \longmapsto (1+x)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x)$ admet la droite d'équation $y = \pi - 1 + \frac{\pi x}{2}$ pour asymptote en $+\infty$ et que, au voisinage de $+\infty$, elle se situe au dessus de son asymptote (en effet $3\pi - 8 > 0$).

4) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\ln\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\operatorname{Arctan}(nu_n)\right)^n\right) = n\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(nu_n)\right) = n\ln\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{nu_n}\right)\right)$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$, on a $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{nu_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que

$$\ln\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\operatorname{Arctan}(nu_n)\right)^n\right) \underset{+\infty}{\sim} -n\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{nu_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -n\frac{2}{\pi}\frac{1}{nu_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-2}{\pi\ell}.$$

Puisque l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\operatorname{Arctan}(nu_n)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2/(\pi\ell)}.$$

Finalement $\left(\operatorname{Arctan}(nu_n)\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n e^{-\pi/(2\ell)}$.

Exercice 28. (★★ à ★★★) Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) $x \longmapsto (2x-1)e^{-3/x}$,
2) $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3+7x^2-3x+1}$,
3) $x \longmapsto \sqrt{x^4+2x+5} - x^2e^{1/x}$,
4) $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$,
5) $x \longmapsto \frac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3}$.

Correction : Appelons f la fonction à chaque question. *Le but ici est de trouver $(a,b,p,a_p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) \underset{+\infty}{=} ax+b+\frac{a_p}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^p}\right)$.*

1) Traitée en cours.
2) *On va déjà commencer par factoriser par $2x$ pour faire apparaître des termes en $1/x$. Le terme en facteur devra donc être développer au moins jusqu'à l'ordre 2 puisque l'ordre 2 va devenir un ordre 1 lorsqu'on va multiplier par $2x$ à la fin.*

   On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8x^3+7x^2-3x+1} &= 2x\sqrt[3]{1+\frac{7}{8x}-\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}}\\ &= 2x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8x}-\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{2!}\left(\frac{7}{8x}-\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{8x^3}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= 2x\left(1+\frac{7}{24x}-\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{9}\left(\frac{7}{8x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= 2x+\frac{7}{12}-\left(\frac{1}{4}+\frac{49}{9\times 32}\right)\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

   Ainsi $f(x)-\left(2x+\frac{7}{12}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{121}{288x}$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=2x+\frac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
3) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaître des termes en $\frac{1}{x}$ dans la racine pour se ramener à des DL usuels en 0.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \sqrt{x^4+2x+5}-x^2e^{1/x} = \sqrt{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)}-x^2e^{1/x} = x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}}-e^{1/x}\right) = x^2g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto \sqrt{1+u^3+5u^4} - e^u$.

Étant donné le x^2 en facteur, pour avoir au moins l'ordre 1, il faut pousser le développement asymptotique de $x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$ (et donc le DL de g en 0) à l'ordre 3.

On a

$$g(u) \underset{u\to 0^+}{=} \left(1+\frac{1}{2}(2u^3+5u^4)+o(u^3)\right) - \left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right) \underset{u\to 0^+}{=} -u-\frac{u^2}{2}+\frac{5u^3}{6}+o(u^3).$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{1}{2}+\frac{5}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -x-\frac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4) *Vu le x^2, il faut aller au moins jusque l'ordre 3 dans le développement de $\ln(1-3/x)$ pour obtenir tous les termes d'ordre 1.*

On a $\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{3}{x}-\frac{9}{2x^2}-\frac{3^3}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Ainsi

$$(x^2+2)\ln\left(1-\frac{3}{x}\right) \underset{+\infty}{=} -3x-\frac{9}{2}-\frac{9}{x}-\frac{6}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi $f(x)-\left(-3x-\frac{9}{2}\right) \underset{+\infty}{=} -\frac{15}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=-3x+\frac{9}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

5) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaître des termes en $\frac{1}{x}$ dans le quotient pour se ramener à un DL usuel en 0.*

On a

$$\frac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3} = \frac{x^5(1-e^{-1/x})}{x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)^3} = x^2(1-e^{-1/x})\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-3} = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto (1-e^{-u})(1+u)^{-3}$.

Étant donné le x^2 en facteur, pour avoir au moins l'ordre 1, il faut pousser le développement asymptotique de $x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$ (et donc le DL de g en 0) à l'ordre 3.

On a

$$\begin{aligned}
g(u) &\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+(-3)(-4)\frac{u^2}{2}+(-3)(-4)(-5)\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+6u^2-10u^3+o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}-3u^2+\frac{3u^3}{2}+6u^3+o(u^3)\\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{7u^2}{2}+\frac{23u^3}{3}+o(u^3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{7}{2x^2}+\frac{23}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{7}{2}+\frac{23}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x-\frac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 29 (Parité et DL). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit f une fonction paire sur $]-a\,;a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1}).$$

Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.

2) Soit f une fonction impaire sur $]-a\,;a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o(x^{2n}).$$

Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_{2k} = 0$.

Correction :

1) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-x)^k + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-1)^k x^k + o(x^{2n+1}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in [\![0\,;2n+1]\!]$. Pour les entiers k impairs de $k \in [\![0\,;2n+1]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

2) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = -f(-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{2n} a_k(-x)^k + o(x^{2n}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k(-1)^{k+1} x^k + o(x^{2n}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^{k+1}$ pour tout $k \in [\![0\,;2n]\!]$. Pour les entiers k pairs de $k \in [\![0\,;2n]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

Exercice 30 (Dérivation et primitivation de DL). On suppose que f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

1) Montrer que

$$f'(x) \underset{0}{=} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

2) a) On note F une primitive de f sur I. Montrer que

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

b) Une application : retrouver le développement limité de Arctan en 0 à tout ordre.

Correction : Comme f est de classe C^n sur I, la formule de Taylor-Young nous assure alors que

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Par unicité du DL, il vient que $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

1) Puisque f est de classe C^n sur I, alors f' est de classe C^{n-1} sur I et

$$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!], \qquad (f')^{(k)}(0) = f^{(k+1)}(0) = a_{k+1}(k+1)!$$

Mais la formule de Taylor-Young nous assure alors que

$$f'(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}(k+1)!}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \underset{0}{=} \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} + o(x^{n-1}).$$

On obtient bien que

$$f'(x) \underset{0}{=} a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

2) Puisque f est de classe C^n sur I, alors f est continue sur I et admet donc une primitive F sur I. Cette primitive est de classe C^{n+1} sur I et

$$\forall k \in [\![0\,;n+1]\!], \qquad F^{(k)}(0) = f^{(k-1)}(0) = a_{k-1}(k-1)!$$

Mais la formule de Taylor-Young nous assure alors que

$$\begin{aligned} F(x) \underset{0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1}) &\underset{0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}(k-1)!}{k!} x^k + o(x^{n+1}) \\ &\underset{0}{=} F(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

On obtient bien que

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

3) La fonction Arctan est la primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$f(x) \underset{0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Puisque f est de classe C^{2n+1} sur $\mathbb{R}$, alors la question précédente nous assure que

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} \mathrm{Arctan}(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} - x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$