Correction de quelques exercices de la feuille de TD 22

Exercice 4. Soit $f : x \longmapsto e^x \sin(x)$. Montrer que $f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Correction :

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions qui le sont. Montrons la formule par récurrence sur n.

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = 2^{0/2} e^x \sin(x + 0)$. Ainsi la formule est vraie au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \\
&= 2^{(n+1)/2} e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{(n+1)/2} e^x \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{(n+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2^{(n+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a_1\,; a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : Si P désigne un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Correction :

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction f est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$, $f(a_k) = f(a_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $b_k \in \,]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$.

  Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction f' est continue sur $[b_k, b_{k+1}]$, dérivable sur $]b_k, b_{k+1}[$, $f'(b_k) = f'(b_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $c_k \in \,]b_k, b_{k+1}[$ tel que $f''(c_k) = 0$.

  Pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, la fonction f'' est continue sur $[c_k, c_{k+1}]$, dérivable sur $]c_k, c_{k+1}[$, $f''(c_k) = f''(c_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $d_k \in \,]c_k, c_{k+1}[$ tel que $f^{(3)}(d_k) = 0$.

  et ainsi de suite (on applique ainsi $n-1$ fois successivement le théorème de Rolle). On obtient qu'il existe $c \in \,]a_1\,; a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

  Pour être plus rigoureux, on peut introduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $H(n)$: « Si f est une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$, alors il existe $c \in \,]a_1\,; a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. »

L'initialisation est simplement le théorème de Rolle. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $H(n)$ est vraie. On se donne une fonction f qui est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+2$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+2}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+2})$. On applique alors le théorème de Rolle $n+1$ fois pour montrer que f' s'annule au moins $n+1$ fois. En appliquant l'hypothèse de récurrence à f', on en déduit que $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ s'annule sur $]a_1\,; a_{n+1}[$. On conclut comme d'habitude.

- Application : Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation $P(x) = e^x$ admet au moins $n+2$ solutions. La fonction $f : x \longmapsto e^x - P(x)$ est alors $n+2$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $n+2$ points distincts. Le résultat montré dans l'exercice entraîne qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c = e^c - P^{(n+1)}(c) = 0$. C'est absurde.

Exercice 10. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} \leqslant \sqrt[5]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} + \dfrac{6x^3}{125}$.

Correction : *On pense tout de suite à Taylor avec reste intégral entre 0 et x (car on a des $x^k = (x-0)^k$) à l'ordre 2 à gauche et à l'ordre 3 à droite.*

- La fonction $f : t \longmapsto \sqrt[5]{1+x}$ est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-4/5}, \qquad f''(x) = -\frac{4}{5^2}(1+x)^{-9/5}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{4\times 9}{5^3}(1+x)^{-14/5}$$

et $f^{(4)}(x) = -\dfrac{4\times 9\times 14}{5^4}(1+x)^{-19/5}$ donc

$$f'(0) = \frac{1}{5}, \qquad f''(0) = -\frac{4}{25}, \qquad f^{(3)}(0) = \frac{36}{125}.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 3 entraîne alors que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} f^{(3+1)}(t)\,dt \\ &= 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \frac{6x^3}{125} - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\frac{4\times 9\times 14}{5^4}(1+t)^{-19/5}\,dt.\end{aligned}$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+$, alors $(x-t)^3 \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,x]$ et donc, par positivé de l'intégrale (car $0 \leqslant x$)

$$\sin(x) - \left(1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \frac{6x^3}{125}\right) = -\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\frac{4\times 9\times 14}{5^4}(1+x)^{-19/5}\,dt \leqslant 0.$$

- La formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 entraîne que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f^{(3)}(t)\,dt \\ &= 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\frac{4\times 9}{5^3}(1+x)^{-14/5}\,dt.\end{aligned}$$

Par positivé de l'intégrale (car $0 \leqslant x$)

$$\sin(x) - \left(1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\frac{4\times 9}{5^3}(1+x)^{-14/5}\,dt \geqslant 0.$$

D'où les deux inégalités.

Exercice 12. Déterminer les maxima et minima locaux des fonctions suivantes :

$$1)\ x \longmapsto x^5 - 15x^3 + 12, \qquad\qquad 2)\ x \longmapsto \ln\left(\frac{2024x}{1+x^2}\right).$$

Correction :

1)

2) Cherchons les points critiques de la fonction $f : x^5 - 15x^3 + 12$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9)$. On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-3, 0, 3\}$.

   Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 20x^3 - 90x = 10x(2x^2 - 9)$. On a

   - $f'(-3) = -30(18 - 9) < 0$ donc -3 est un maximum local.
   - $f'(3) = 30(18 - 9) > 0$ donc 3 est un minimum local.
   - $f'(0) = 0$ donc on ne peut pas conclure directement avec la condition suffisante vue en cours. Par contre on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f(0) = x^5 - 15x^3 = x^3(x^2 - 15) \left\{ \begin{array}{lll} < 0 & \text{si} & x \in \left]0, 1\right] \\ > 0 & \text{si} & x \in \left[-1, 0\right[. \end{array} \right.$$
   Le signe de $f(x) - f(0)$ varie lorsque x est au voisinage de 0. Ainsi 0 n'est pas un extremum local.

3) Cherchons les points critiques de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2019x}{1 + x^2}\right)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{x(1 + x^2)} = \frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)}.$$
   On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $1 - x^2 = 0$ si et seulement si $x = 1$.

   Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f''(x) = \frac{-2x^2(1 + x^2) - (3x^2 + 1)(1 - x^2)}{x^2(1 + x^2)^2}.$$
   Et on calcule que $f''(1) = -1 < 0$. Ainsi 1 est un maximum local et c'est le seul extremum local de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 (Sommes de Riemann perturbées).

1) Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan}(x) - x| \leqslant x^2$.
3) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : A FAIRE

Exercice 15. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{n}{n^2 + k^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : *Il faut adopter la même démarche que dans l'exercice précédent car on se dit que « $\ln\left(1 + \dfrac{n}{n^2 + k^2}\right) \approx \dfrac{n}{n^2 + k^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1 + (k/n)^2}$ » et il s'agit alors d'une somme de Riemann.*

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $f : x \longmapsto \ln(1 + x)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ à l'ordre 1 entre 0 et $x \in \mathbb{R}_+$:
$$\big|f(x) - f(0) - f'(0)(x - 0)\big| \leqslant \frac{|x - 0|^2}{2} \max_{[0;x]} |f''|.$$
Or $f' : x \longmapsto \dfrac{1}{1 + x}$ et $f'' : x \longmapsto -\dfrac{1}{(1 + x)^2}$ et donc f'' est bornée par 1 sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :
$$|\ln(1 + x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$,
$$\left|\ln\left(1 + \frac{n}{n^2 + k^2}\right) - \frac{n}{n^2 + k^2}\right| \leqslant \frac{n^2}{2(n^2 + k^2)^2} \leqslant \frac{n^2}{2(n^2 + 0)^2} = \frac{1}{2n^2}.$$

Sommons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\ln\left(1+\frac{n}{n^2+k^2}\right)-\frac{n}{n^2+k^2}\right|\leqslant\frac{n^2}{2(n^2+k^2)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2n}.$$

Par inégalité triangulaire et linéarité :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{n^2+k^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\right|\leqslant\frac{n^2}{2(n^2+k^2)^2}\leqslant\frac{1}{2n}.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{n^2+k^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Enfin :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=[\mathrm{Arctan}(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{n^2+k^2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 17. Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ et $M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir une majoration de $M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$ à partir de M_0 et M_2.

1) Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$,

$$\big|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\big|\leqslant\frac{M_2h^2}{2},\qquad\text{et}\qquad\big|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\big|\leqslant\frac{M_2h^2}{2}.$$

2) Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$, $\big|f'(x)\big|\leqslant\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{M_2h}{2}$.

3) En déduire que f' est bornée et que $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$.

Correction :

1) Soient $h\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

- (avec $a=x$ et $b=x+h$) :

$$\big|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\big|\leqslant\frac{(x+h-x)^2}{2}\sup_{t\in[x,x+h]}|f''(t)|\leqslant\frac{M_2h^2}{2}.$$

- (avec $a=x$ et $b=x-h$) :

$$\big|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\big|\leqslant\frac{(x-h-x)^2}{2}\sup_{t\in[x-h,x]}|f''(t)|\leqslant\frac{M_2h^2}{2}.$$

2) On a

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)-(f(x+h)-f(x)-hf'(x)=f(x+h)-f(x-h)+2hf'(x)$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$|f(x+h)-f(x-h)+2hf'(x)|\leqslant\big|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\big|+\big|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\big|\leqslant\frac{M_2h^2}{2}+\frac{M_2h^2}{2}=M_2h^2$$

puis

$$\begin{aligned}|2hf'(x)| &= \big|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)\big| \\ &\leqslant \big|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x)\big| + \big|f(x+h)\big| + \big|f(x-h)\big| \\ &\leqslant M_2h^2 + M_0 + M_0.\end{aligned}$$

et donc $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$.

3) La fonction $\varphi : h \longmapsto \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $h > 0$, $\varphi'(h) = -\dfrac{M_0}{h^2} + \dfrac{M_2}{2} \geqslant 0$ si et seulement si $h^2 \leqslant \dfrac{2M_0}{M_2}$. Ainsi φ est croissante sur $]0, \sqrt{2M_0/M_2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{2M_0/M_2}, +\infty[$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(h) \leqslant \varphi\left(\sqrt{2M_0/M_2}\right) = \frac{M_0\sqrt{M_2}}{\sqrt{2M_0}} + \frac{M_2\sqrt{2M_0}}{2\sqrt{M_2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

Ainsi f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 18 (Méthode de Newton). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles qui s'annule en $x^* \in \,]a\,;b[$ et telle que f' ne s'annule pas sur $[a\,;b]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que, sous l'hypothèse que f est de classe C^2 sur $[a\,;b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $|x_0 - x^*| \leqslant \alpha$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* à vitesse quadratique, c'est-à-dire

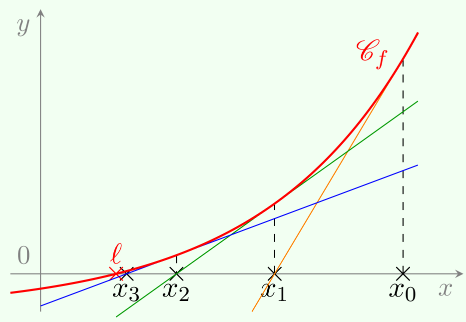
$$\exists K > 0, \quad \exists \lambda \in \,]0\,;1[\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - x^*| \leqslant K\,\lambda^{2^n}.$$

1) On suppose que f est de classe C^2 sur $[a\,;b]$ et on pose $\varphi : x \in [a\,;b] \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Remarquer que x^* est un point fixe de φ.
2) Justifier l'existence de $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $|f'(x)| \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$.
3) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in [a\,;b]\,, \qquad |\varphi(x) - x^*| \leqslant \frac{M}{2m}|x - x^*|^2.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{M}{2m}|x_n - x^*|$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$.
   b) Conclure (on prendra $\alpha \leqslant \min\{x^* - a, b - x^*, \frac{2m}{M}\}$ et on précisera K et λ en fonction de m, M et x_0).

Interprétation graphique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est la solution de l'équation $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, c'est-à-dire x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_n avec la droite des abscisses.



5) Prenons $f : x \longmapsto x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$ dans cette question.
   a) Vérifier que, alors, les valeurs $m = 2$ et $M = 2$ conviennent. Que prendre pour K, λ et donc pour n afin que $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-8}$?
   b) Calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près en utilisant la méthode de Newton.
   c) De combien d'itérations a-t-on eu besoin avec cette méthode ? Comparer avec le nombre d'itérations nécessaire dans la méthode de Dichotomie de l'exercice 2 du TD n° 14 et la méthode du point fixe faite en exemple de cours du chapitre 15.

Correction :

1) On a $\varphi'(x^*) = x^* - \dfrac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^* - 0 = x^*$. Ainsi x^* est un point fixe de φ.

2) La fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est minorée et atteint ses bornes : il existe $t \in [a,b]$ tel que $|f'(t)| = \min\limits_{[a,b]} |f'|$. Il suffit alors de poser $m = |f'(t)| > 0$ (car, par hypothèse, f' ne s'annule pas).

   La fonction f'' est continue sur le segment $[a,b]$ donc elle est bornée par un certain réel $M > 0$.

3) Soit $x \in [a,b]$. On a

$$\varphi(x) - x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x^* = \frac{-f(x) - (x^* - x)f'(x)}{f'(x)} = \frac{f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)}{f'(x)}.$$

   La fonction φ est de classe C^2 sur $[a,b]$ donc l'inégalité de Taylor-Lagrange entraîne que, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x^* - x|^2.$$

   Ainsi

$$|\varphi(x) - x^*| \leqslant \frac{M}{2}\frac{|x^* - x|^2}{|f'(x)|} \leqslant \frac{M}{2m}|x - x^*|^2.$$

4) a) La grosse difficulté est de garantir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a\,;b]$ afin de pouvoir appliquer l'inégalité précédente avec $x = x_n$. Si c'est le cas, alors elle devient :

$$|x_{n+1} - x^*| \leqslant \frac{M}{2m}|x_n - x^*|^2.$$

   En multipliant par $\frac{M}{2m} > 0$, on obtient alors :

$$\frac{M}{2m}|x_{n+1} - x^*| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|x_n - x^*|\right)^2$$

   c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n^2$. On procède alors par récurrence :

   - $u_0 \leqslant u_0^{2^0}$ donc la formule est vraie au rang 0.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_0^{2^n}$. On a alors

$$u_{n+1} \leqslant\leqslant u_n^2 \leqslant (u_0^{2^n})^2 = u_0^{2^{n+1}}.$$

     Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$. Par récurrence nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$.

   Mais il reste à prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a\,;b]$. C'est à ce moment de la preuve où le réel α apparaît. Déjà remarquons que, si on prend $\delta = \min\{x^* - a, b - x^*\}$ alors $[x^* - \delta\,; x^* + \delta] \subset [a\,;b]$. Ainsi :

   - Si $\alpha < \delta$, dès que $|x_n - x^*| \leqslant \alpha$ alors $x_n \in [a\,;b]$.
   - Si on sait que $|x_n - x^*| \leqslant \alpha$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $|x_{n+1} - x^*| \leqslant \dfrac{M}{2m}\alpha^2$. Il suffit donc de choisir α tel que $\dfrac{M}{2m}\alpha^2 \leqslant \alpha$ c'est-à-dire $\alpha \leqslant \dfrac{2m}{M}$.

   Ainsi, il suffit de prendre $\alpha = \min\{\delta, \frac{2m}{M}\} = \min\{x^* - a, b - x^*, \delta, \frac{2m}{M}\}$.

   b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - x^*| = \frac{2m}{M}u_n \leqslant \frac{2m}{M}u_0^{2^n} = \frac{2m}{M}u_0^{2^n} = K\lambda^{2^n},$$

   avec $K = \dfrac{2m}{M}$ et $\lambda \geqslant u_0 = \dfrac{2m}{M}|x_0 - x^*|$ de sorte que $\lambda \in]0,1[$. C'est possible dès que l'on prend x_0 tel que $|x_0 - x^*| \leqslant \alpha$ (puisque $\alpha \leqslant \frac{2m}{M}$).

5) a) Déjà f est bien de classe C^2 sur $[a\,;b]$, s'annule en $x^* = \sqrt{2}$ et $f' : x \longmapsto 2x$ ne s'annule pas sur $[a\,;b]$. On définit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

On voit que $|f'|$ est minorée par $m = 2$ et $|f''|$ majorée par $M = 2$ sur $[a\,;b]$. On prend donc :

- $K = \dfrac{2m}{M} = 2,$
- $\alpha = \dfrac{1}{4}$ afin que $\alpha \leqslant \min\{\sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}, 2\}$.
- $x_0 = 3/2$ et on a bien $|x_0 - \sqrt{2}| \leqslant \alpha$.
- $u_0 = \dfrac{1}{2}|x_0 - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{20}$ donc prenons $\lambda = \dfrac{1}{20}$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{2}{20^n}$. Il suffit alors que $\dfrac{2}{20^n} \leqslant 10^{-8}$ pour que $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-8}$. C'est le cas si et seulement si $\ln(2) - n\ln(20) \leqslant -8\ln(10)$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{8\ln(10)+\ln(2)}{\ln(20)}$. On prend donc $n = \left\lfloor \dfrac{8\ln(10)+\ln(2)}{\ln(20)} \right\rfloor + 1 = 7$.

b)

```python
n=7
x=3/2
for k in range(n):
    x=x/2+1/x
print(x)
```

c) On a eu besoin de 7 itérations. C'est bien mieux que dans les autres méthodes.