Correction de quelques exercices de la feuille de TD 21

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$?

1) $f \longmapsto f' - 2f'' + 3f,$ 2) $f \longmapsto \exp \circ f$ 3) $f \longmapsto (\sin \times f)'$ 4) $f \longmapsto \big(x \mapsto x\, f''(2024)\big)$

Correction :

1) Notons $\varphi : f \longmapsto f' - 2f'' + 3f$. Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f'' \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $\varphi(f) = f' - 2f'' + 3f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' - 2(\lambda f + g)'' + 3(\lambda f + g)\\ &= (\lambda f' + g') - 2(\lambda f'' + g'') + 3(\lambda f + g)\\ &= \lambda(f' - 2f'' + 3f) + (g' - 2g'' + 3g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

   Ainsi φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

2) Notons $\varphi : f \longmapsto \exp \circ f$. Si f_1 désigne la fonction constante égale à 1, alors $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus
   - $\varphi(2f_1) = \exp \circ (2f_1)$ est la fonction constante égale à e^2.
   - $2\varphi(f_1) = 2\,\exp \circ f_1$ est la fonction constante égale à $2e$.

   Ainsi $\varphi(2f_1) \neq 2\varphi(f_1)$ et donc φ n'est pas un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

3) Notons $\varphi : f \longmapsto (\sin \times f)' = f' \sin + f \cos$. On a $\cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\sin \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc, pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $\varphi(f) = f' \sin + f \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \sin + (\lambda f + g) \cos\\ &= (\lambda f' + g') \sin + (\lambda f + g) \cos\\ &= \lambda(f' \sin + f \cos) + (g' \sin + g \cos) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

   Ainsi φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

4) Notons $\varphi : f \longmapsto \big(x \mapsto x\, f''(2021)\big)$. Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $x \mapsto x\, f''(2021)$ est linéaire donc appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$. Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda f + g)(x) = x\,(\lambda f + g)''(2021) = \lambda(x\, f''(2021)) + (x\, g''(2021)) = \big(\lambda\varphi(f) + \varphi(g)\big)(x).$$

   Ainsi φ est un endomorphisme.

Exercice 3. Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (y - 2z, 2x + y - 4z, x + y - 3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Correction :

1) Déjà, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors $f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ensuite, on se donne deux vecteurs (x,y,z) et (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}&f(\lambda(x,y,z) + (u,v,w))\\ &\quad= f(\lambda x + u, \lambda y + v, \lambda z + w)\\ &\quad= \big((\lambda y + v) - 2(\lambda z + w), 2(\lambda x + u) + (\lambda y + v) - 4(\lambda z + w), (\lambda x + u) + (\lambda y + v) - 3(\lambda z + w)\big)\\ &\quad= \big(\lambda(y - 2z) + (v - 2w), \lambda(2x + y - 4z) + (2u + v - 4w), \lambda(w + y - 3z) + (u + v - 3w)\big)\\ &\quad= \lambda(y - 2z, 2x + y - 4z, x + y - 3z) + (v - 2w, 2u + v - 4w, u + v - 3w)\\ &\quad= \lambda f(x,y,z) + f(u,v,w).\end{aligned}$$

2) • **Méthode 1.** Soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. On a $(x',y',z') \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement le système

$$\begin{cases} \quad\;\; y - 2z = x' \\ 2x + y - 4z = y' \\ x + y - 3z = z' \end{cases}$$

d'inconnue (x,y,z) admet une solution. On

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \quad\;\; y - 2z = x' \\ 2x + y - 4z = y' \\ x + y - 3z = z' \end{cases}
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = y' & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \quad\;\; y - 2z = x' \\ x + y - 3z = z' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = y' \\ \quad\;\; y - 2z = x' \\ \quad\;\; y - 2z = 2z' - y' & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = y' \\ \quad\;\; y - 2z = x' \\ \quad\;\; 0 = 2z' - y' - x' & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce système admet des solutions si et seulement si $0 = 2z' - y' - x'$ si et seulement si $y' = 2z' - x'$ si et seulement si $(x',y',z') = x'(1,-1,0) + z'(0,2,1)$.
Finalement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(0,2,1)\big)$. Comme $(1,-1,0),(0,2,1)$ sont non colinéaires, on en déduit que $\big((1,-1,0),(0,2,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Méthode 2. Comme $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,1,1),(-2,-4,-3)\big).$$

On remarque que $(-2,-4,-3) = -2(1,1,1) - (0,2,1)$. Ainsi $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,1,1)\big)$. Comme $(1,1,1),(0,2,1)$ sont non colinéaires, on en déduit que $\big((1,-1,0),(0,2,1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Est-ce qu'on a bien obtenu le même résultat ? On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,-1,0)\big)$ *et* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,2,1),(1,1,1)\big)$. *C'est bien le même puisque* $(1,1,1) = (1,-1,0) + (0,2,1)$.

• Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} \quad\;\; y - 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ \quad\;\; y - 2z = 0 \\ \quad\;\; 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -y + 4z = 2z \\ y = 2z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = z(1,2,1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big)$.

Exercice 4. Notons $F = \left\{(x+y+4z, 2x+4z, 3x+2y+10z) \,\middle|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

1) Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F = \mathrm{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On que F est définie sous forme paramétrée.
2) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire F sous la forme $\mathrm{Ker}(g)$ avec $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit alors que $g(x) = 0$ est une équation de F.
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, i.e. il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \{\lambda u \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5) L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Correction :

1) Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+y+4z, 2x+4z, 3x+2y+10z)$.

   Déjà $f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ensuite, on se donne deux vecteurs (x,y,z) et (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
&f(\lambda(x,y,z) + (u,v,w)) \\
&\quad = f(\lambda x + u, \lambda y + v, \lambda z + w) \\
&\quad = \big((\lambda x + u) + (\lambda y + v) + 4(\lambda z + w), 2(\lambda x + u) + 4(\lambda z + w), 3(\lambda x + u) + 2(\lambda y + v) + 10(\lambda z + w)\big) \\
&\quad = \big(\lambda(x+y+4z) + (u+v+4w), \lambda(2x+4z) + (2u+4w), \lambda(2x+2y+10z) + (3u+2v+10w)\big) \\
&\quad = \lambda(x+y+4z, 2x+4z, 3x+2y+10z) + (u+v+4w, 2u+4w, 3u+2v+10w) \\
&\quad = \lambda f(x,y,z) + f(u,v,w)
\end{aligned}$$

   Ainsi f est un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

   Par définition, on a $F = \left\{f(x,y,z) \,\middle|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Im}(f)$. Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (c'est le cas de l'image d'une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$).

2) Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$, on a

$$F = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,2,3),(1,0,2),(4,4,10)).$$

   Puisque $2(1,2,3) + 2(1,0,2) = (4,4,10)$, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}((1,2,3),(1,0,2))$.

3) *Il s'agit en fait de trouver une équation de F. On a vu dans le chapitre 18 une méthode permettant de trouver une équation d'un espace engendré.*

   On a $(x,y,z) \in F$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y,z) = a(1,2,3) + b(1,0,2)$ si et seulement si le système

$$(S)\begin{cases} a + b = x \\ 2a = y \\ 3a + 2b = z \end{cases}$$

   d'inconnues a et b, admet une solution. On a

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2b = 2x - y & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ b = 3x - z & L_3 \leftarrow 3L_1 - L_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2b = 2x - y \\ 0 = 2(3x-z) - (2x-y) & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

   Ce système admet donc des solutions si et seulement si $0 = 2(3x-z) - (2x-y) = 4x + y - 2z$.
   On a donc $(x,y,z) \in F$ si et seulement si $0 = 4x + y - 2z = g(x,y,z)$ où $g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 4x + y - 2z$. (*je vous laisse vérifier que g est bien linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$*).

   Par définition $F = \mathrm{Ker}(g)$.

4) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} x+y+4z=0\\ 2x+4z=0\\ 3x+2y+10z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y+4z=0 & \\ -2y-4z=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ -y-2z=0 & L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x+y+4z=0 & \\ -2y-4z=0 & \\ 0=0 & L_3\leftarrow 2L_3-L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-2z\\ y=-2z\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)=z(-2,-2,1).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((-2,-2,1))$.

5) Puisque $\mathrm{Ker}(f)\neq\{(0,0,0)\}$, f n'est pas injectif. On a $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbb{R}^3$ (par exemple, $4\cdot 1+1-2\cdot 1=3\neq 0$ donc $(1,1,1)\notin\mathrm{Ker}(g)=F=\mathrm{Im}(f)$) donc f n'est pas surjective. Et donc f n'est pas bijective.

Exercice 7. Soit $f:(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\longmapsto(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$. Est-il injectif ?
2) Pour tout $j\in\mathbb{N}$, introduisons la suite $u^{(j)}$ définie par $u_j^{(j)}=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{j\}$, $u_n^{(j)}=0$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(u^{(0)},\dots,u^{(k)})$ est une base de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
3) Montrer que f est surjectif.

Correction :

1) Déjà $f((u_n)_n)=(u_{n+1})_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour tout $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ensuite donnons-nous $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda(u_n)_n+(v_n)_n)=f((\lambda u_n+v_n)_n)=(\lambda u_{n+1}+v_{n+1})_n=\lambda(u_{n+1})_n+(v_{n+1})_n=\lambda f((u_n)_n)+f((v_n)_n)$$

Nous en déduisons que f est un endomorphisme.

Notons $(x_n)_n$ la suite telle que $x_0=1$ et $x_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On a $f((x_n)_n)=(0)_n$ alors que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite nulle. Ainsi f n'est pas injective.

2) Soit $k\in\mathbb{N}$. Si $(u_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors $f((u_n)_n)=(u_{n+1})_n$, $f^2((u_n)_n)=f((u_{n+1})_n)=(u_{n+2})_n$, $f^3((u_n)_n)=f((u_{n+2})_n)=(u_{n+3})_n$ et, par récurrence immédiate

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad f^k((u_n)_n)=(u_{n+k})_n.$$

Une suite $(u_n)_n$ appartient à $\mathrm{Ker}(f^k)$ si et seulement si elle est nulle à partir du rang k et donc si et seulement si

$$(u_n)_n=u_0(e_n^{(0)})_n+u_1(e_n^{(1)})_n+u_2(e_n^{(2)})_n+\dots+u_{k-1}(e_n^{(k)})_n,$$

où, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $(e_n^j)_n$ désigne la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $j^{\text{ième}}$ qui vaut 1.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f^k)=\mathrm{Vect}\left((e_n^{(0)})_n,(e_n^{(1)})_n,(e_n^{(2)})_n,\dots,(e_n^{(k)})_n\right)$.

3) Si $(u_n)_n\in\mathbb{R}\mathbb{N}$, introduisons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_0=0$ et $v_n=u_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On a $f((v_n)_n)=(u_n)_n$. Ainsi f est surjective.

Exercice 10. Soient E un espace vectoriel admettant une base (e_1, e_2, e_3). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \qquad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_3, \qquad \text{et} \qquad f(e_3 + e_2) = 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3).$$

Déterminer α afin que f soit injective.

Correction : En vertu du théorème de caractérisation par l'image des vecteurs d'une base, il suffit de montrer que $\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_2\big)$ est une base de E.

- Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + b(e_1 - e_2) + c(e_3 + e_2) = 0$. On a alors $(a + b)e_1 + (c - b)e_2 + ce_3 = 0$. Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on en déduit que $a + b = c - b = c = 0$ et donc $a = b = c = 0$.
  Ainsi $\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_2\big)$ est libre.
- On a $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 - e_2, e_3) = \mathrm{Vect}\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 - (e_1 - e_2) + e_1\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_2\big)$ donc $\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_2\big)$ est génératrice.

Ainsi $\big(e_1, e_1 - e_2, e_3 + e_2\big)$ est une base de E. Le théorème de caractérisation par l'image des vecteurs d'une base entraîne alors qu'il existe une unique application linéaire de f de E dans E telle que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \qquad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_3, \qquad \text{et} \qquad f(e_3 + e_2) = 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3).$$

Cette application est injective si et seulement si $\big(e_1 - e_2, e_1 + e_2 - e_3, 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3)\big)$ est libre. Donnons-nous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
& a(e_1 - e_2) + b(e_1 + e_2 - e_3) + c2(e_1 - e_2 + \alpha e_3) = 0 \\
& \qquad \iff \quad (a + b + 2c)e_1 + (-a + b - 2c)e_2 + (-b + 2\alpha c)e_3 = 0 \\
& \qquad \iff \quad \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ -a + b - 2c = 0 \\ -b + 2\alpha c = 0 \end{cases} \\
& \qquad \iff \quad \begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2b = 0 \\ -b + 2\alpha c = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
& \qquad \iff \quad \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b = 0 \\ 2\alpha c = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1
\end{aligned}$$

(la deuxième équivalence découle du fait que (e_1, e_2, e_3) est libre).

- Si $\alpha = 0$, alors ce système admet $(2, 0, -1)$ pour solution si bien que la famille est liée.
- Si $\alpha \neq 0$, alors $a = b = c = 0$ et donc la famille est libre.

Ainsi f est injective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Exercice 11. Soient E, E', F et F' des espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E', F') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$ est bien définie et est un isomorphisme.

Correction :

- Notons T cette application. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors, puisque $\varphi^{-1} \in \mathscr{L}(E', E)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F, F')$, on a $T(f) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathscr{L}(E', F')$. Ainsi T est bien définie.

- Donnons-nous f et g dans $\mathscr{L}(E, F)$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

  $$T(\lambda f + g) = \psi \circ (\lambda f + g) \circ \varphi^{-1} = \psi \circ (\lambda f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}) = \lambda \psi \circ f \circ \varphi^{-1} + \psi \circ g \circ \varphi^{-1},$$

  où on a utilisé la linéarité de ψ à la dernière égalité. Ainsi $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Il s'ensuit que T est linéaire.

- Soit $f \in \operatorname{Ker}(T)$. On a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = T(f) = 0$ et donc $f = \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \psi^{-1} \circ 0 \circ \varphi = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ et donc T est injective.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Posons $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. On a $T(g) = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f$. Ainsi $f \in \operatorname{Im}(T)$. On a donc $\operatorname{Im}(T) = \mathscr{L}(E, F)$ et donc T est surjective.

Nous en déduisons que T est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{L}(E', F')$.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Cet exercice est un immense classique. Voici la démarche à suivre : le fait que, pour un $x \in E$ donné quelconque, la famille $(x, f(x))$ est liée signifie qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Le but de cet exercice est donc de montrer que λ_x ne dépend pas de x en fait.

1) Soit (x, y) une famille libre. En s'intéressant à $x + y$, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

2) Soit (x, y) une famille liée avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.

3) Conclure.

Correction :

1) Supposons que (x, y) est une famille libre. On a

$$\lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$. Comme la famille (x, y) est libre, $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_y - \lambda_{x+y} = 0$. En particulier $\lambda_x = \lambda_y$.

2) Supposons que (x, y) est une famille liée et que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x = \mu y$. On a alors

$$\lambda_x x = f(x) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu \lambda_y y = \lambda_y \mu y = \lambda_y x.$$

Comme $x \neq 0$, $\lambda_x = \lambda_y$.

3) Donnons-nous $x_0 \in E$ quelconque. Soit $x \in E$.
   - Si (x, x_0) est libre, alors $f(x) = \lambda_x x = \lambda_{x_0} x$.
   - Si (x, x_0) est liée et $x \neq 0$, alors $f(x) = \lambda_x x = \lambda_{x_0} x$.
   - Si (x, x_0) est liée et $x = 0$, alors $f(x) = f(0) = 0 = \lambda_{x_0} x$.

   Dans tous les cas, $f(x) = \lambda_{x_0} x$.
   On en déduit que f est une homothétie.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P'$.

1) Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image.

2) Calculer $(\operatorname{Id}_E - d) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} d^k \right)$.

3) En déduire que $\operatorname{Id}_E - d$ est un automorphisme de E.

4) Déterminer l'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\operatorname{Id}_E - d$.

Correction :

1)
   - Déjà, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $d(P) = P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.
     Ensuite on se donne un scalaire λ et deux vecteurs P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a

     $$d(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda d(P) + d(Q).$$

     Ainsi $d \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
   - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P \in \operatorname{Ker}(d)$ si et seulement si $P' = d(P) = 0$ si et seulement si P est constant. Ainsi $\operatorname{Ker}(d) = \mathbb{R}_0[X]$.

- Soit $R \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P \in \operatorname{Im}(d)$ si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $R = d(P) = P'$ si et seulement si il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad R = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \in \operatorname{Vect}(1, \ldots, X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Ainsi $\operatorname{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2) On a

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Id}_E - d) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) = \left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) - d \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) &= \sum_{k=0}^{n} d^k - \sum_{k=0}^{n} d \circ d^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} d^k - \sum_{k=0}^{n} d^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (d^k - d^{k+1}) \\
&= d^0 - d^{n+1} = \operatorname{Id}_E - d^{n+1}
\end{aligned}$$

Mais, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$. Ainsi d^{n+1} est l'application nulle.

Finalement $(\operatorname{Id}_E - d) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) = \operatorname{Id}_E$.

3) On montre de même que $\left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) \circ (\operatorname{Id}_E - d) = \operatorname{Id}_E$. Ainsi $\operatorname{Id}_E - d$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque $\sum_{k=0}^{n} d^k$.

Si f et g sont deux endomorphismes tels que $f \circ g = g \circ f = \operatorname{Id}_E$, alors f et g sont bijectifs et réciproque l'une de l'autre (cf. chapitre 7).

4) L'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\operatorname{Id}_E - d$ est donc

$$\left(\sum_{k=0}^{n} d^k \right) \left(\frac{X^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{n} d^k \left(\frac{X^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{X^n}{n!} \right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) X^{n-k}.$$

Il s'agit simplement du fait que $f(x) = y$ ssi $x = f^{-1}(y)$ pour tous vecteurs x et y.

Ainsi l'antécédent est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{X^j}{j!}$.

Exercice 20. Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt & \text{si} \quad x > 0, \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array},$$

puis l'application $T : \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$.

1) Montrer que $T(f) \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

2) Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3) Montrer que T est injective.

4) Soit $g \in \operatorname{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x g'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Est-ce que T est surjective ?

5) Déterminer $\operatorname{Im}(T)$.

Correction : Ici on considère des intégrales de fonctions continues sur des segments donc il n'y a aucun problème de convergence.

1) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Déjà $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Si F désigne une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$T(f)(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} F'(0) = f(0) = T(f)(0).$$

   Par conséquent $T(f)$ est continue en 0. Par conséquent $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) En vertu de la question 1, il reste à montrer que T est linéaire. On se donne f et g deux vecteurs de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Intéressons-nous $T(\lambda f + g)$.

   - Si $x > 0$,

$$T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f+g)(t)\,dt = \frac{1}{x}\left(\lambda\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt\right) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x).$$

   - Si $x = 0$,

$$T(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x).$$

   Par conséquent $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$.

3) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On a $f \in \mathrm{Ker}(T)$ si et seulement si $T(f) = 0$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $T(f)(x) = 0$ si et seulement si $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

   si et seulement si $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \int_0^x f(t)\,dt = 0$$

   si et seulement si $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) - F(0) = 0$$

   (où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$) si et seulement si $f(0) = 0$ et f admet une primitive constante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si f est nulle.

   ⚠ *Ici f n'est pas positive a priori donc ce n'est pas pour cela que son intégrale est nulle qu'elle est nulle.*

   Ainsi $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ *Ici 0 désigne l'application nulle* et donc T est injective.

4) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Il existe alors f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = g(0)$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xg(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Cette égalité évidemment reste vraie pour $x = 0$. Nous en déduisons que la fonction $x \longmapsto xg(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que f est sa dérivée. Comme f est continue, on en déduit que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xg'(x) + g(x).$$

   On a déjà montré que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que $g(0) = f(0)$. Par conséquent $\lim_{x\to 0^+} xg'(x) = f(0) - g(0) = 0$.

   La fonction $g_0 : x \longmapsto |x-1|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable en 1 donc n'appartient pas à $Im(T)$. Ainsi T n'est pas surjective.

5) On vient de montrer que

$$\mathrm{Im}(T) \subset \mathcal{A} = \left\{ g \in C^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \,\middle|\, xg'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0. \right.$$

Réciproquement, donnons-nous $g \in \mathcal{A}$. La fonction $x \longmapsto xg(x)$ est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons f sa dérivée. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = T(f)(x).$$

Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xg'(x) + g(x).$$

Comme g est continue en 0, on a $g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} g(0)$. Par hypothèse $xg'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} g(0)$. On prolonge ainsi f par continuité en posant $f(0) = g(0)$. On a alors $T(f)(0) = g(0)$.

On en déduit que $g = T(f) \in \mathrm{Im}(T)$. En vertu de la question 4, on a donc $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{A}$.