Correction des exercices de la feuille de TD 20

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=y\}$.
2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\leqslant y\}$.
3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=1+2y\}$.
4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqslant 1\}$.
5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=0\}$.
6) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2=0\}$.
7) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 5x+2z=0\}$.
8) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
9) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, (x-y)^2=2x+y\}$.
10) $\{(x-y,2x+y,y) \,|\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
11) $\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
12) L'ensemble des suites réelles bornées.
13) L'ensemble des suites réelles croissantes.
14) L'ensemble des suites monotones.
15) L'ensemble des suites géométriques.
16) L'ensemble des suites arithmétiques.
17) L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de paramètres a et b, où $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
18) L'ensemble des suites qui convergent vers -1.
19) $\{P\in\mathbb{R}[X] \,|\, \deg(P)=n\}$, pour $n\in\mathbb{N}$.
20) $\{P\in\mathbb{R}[X] \,|\, A \text{ divise } P\}$, pour $A\in\mathbb{R}[X]$.
21) $\{P\in\mathbb{R}[X] \,|\, 0 \text{ est racine } P\}$.
22) $\{P\in\mathbb{R}[X] \,|\, 0 \text{ est racine double de } P\}$.
23) L'ensemble des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui s'annulent.
24) L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, où $T>0$.
25) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.
26) L'ensemble des fonctions affines.
27) L'ensemble des bijections de $[a,b]$ sur $\mathbb{R}$.
28) L'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a)=f'(a)=0$.
29) $\{M\in\mathcal{M}_n(K) \,|\, M^2=M\}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
30) $\left\{f\in C^0([a,b],\mathbb{R}) \,\middle|\, \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=0\right\}$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.

Correction : A chaque question, notons F l'ensemble que l'on étudie.

1) On a $(0,0)\in F$ car $0=0$. Ensuite donnons-nous $(x,y)\in F$, $(u,v)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a alors $x=y$ et $u=v$ donc $\lambda x+u=\lambda y+v$. Ainsi $\lambda(x,y)+(u,v)=(\lambda x+u,\lambda y+v)\in F$.
Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Ainsi F est un espace vectoriel.
2) Non car $(0,1)\in F$ mais $-(0,1)=(0,-1)\notin F$.
3) Non car $(0,0)\notin F$.
4) Non car $(0,1)\in F$ mais $2(0,1)=(0,2)\notin F$.
5) On a $(x,y)\in F$ si et seulement si $x^2+y^2=0$ si et seulement si $x=y=0$. Ainsi $F=\{(0,0)\}$ est un espace vectoriel.
6) Non car $(1,1)\in F$ et $(-1,1)\in F$ alors que $(1,1)+(-1,1)=(0,2)\notin F$.
On peut faire un dessin : F est la réunion des deux bissectrices des axes.
7) On a $5\cdot 0+2\cdot 0=0$ donc $(0,0)\in F$. Donnons-nous $(x,y)\in F$, $(s,t)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $5(x+s)+2(y+t)=(5x+2y)+(5s+2t)=0+0=0$ donc $(x,y)+(s,t)=(x+s,y+t)\in F$. Ensuite $5(\lambda x)+2(\lambda y)=\lambda(5x+2y)=0$ donc $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\in F$.
Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Ainsi F est un espace vectoriel.
8) Notons F l'ensemble en question. On a $0-0+0=0$ et $2\cdot 0-0=0$ donc $(0,0,0)\in F$. Donnons-nous $(x,y,z)\in F$, $(s,t,u)\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$(x+s)-(y+t)+(z+u)=(x-y+z)+(s-t+u)=0+0+0=0$$

$$\text{et} \qquad 2(x+s)-(y+t) = (2x-y)+(2s-t) = 0+0 = 0$$

donc $(x,y,z)+(s,t,u) = (x+s, y+t, z+u) \in F$. Ensuite

$$(\lambda x)-(\lambda y) = \lambda(5x+2y) = 0 \qquad \text{et} \qquad 2(\lambda x)-(\lambda y) = \lambda(2x-y) = 0$$

donc $\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

9) On a $(0-1)^2 = 2\cdot 0+1$ donc $(0,1) \in F$. Mais $(0-2)^2 \neq 2\cdot 0+2$ donc $2(0,1) = (0,2) \notin F$. Ainsi ce n'est pas un espace vectoriel.

10) L'ensemble

$$\{(x-y, 2x+y, y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,2,0)+y(-1,1,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((1,2,0),(-1,1,1)\big)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ainsi F est un espace vectoriel.

11) Non car $(1,0) \in Z^2$ alors que $\frac{1}{2}(1,0) = (\frac{1}{2},0) \notin \mathbb{Z}^2$.

12) La suite nulle est bornée donc elle appartient à F. Donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant A$.
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant B$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire,

$$|\lambda u_n + v_n| \leqslant |\lambda u_n| + |v_n| \leqslant |\lambda| A + B.$$

Ainsi $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle appartient donc à F.
Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc un espace vectoriel.

13) Non car la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais pas $-(n)_{n\in\mathbb{N}} = (-n)_{n\in\mathbb{N}}$.

14) Les suites $(-2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Mais

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2)_{n\in\mathbb{N}} + (-2n+1)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2-2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$$

n'est pas monotone puisque $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 1$.

15) Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites géométriques de terme initial 1 et de raisons respectives 1 et 2. On a

$$\frac{u_1+v_1}{u_0+v_0} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \neq \frac{5}{3} = \frac{1+4}{1+2} = \frac{u_2+v_2}{u_1+v_1}.$$

Ainsi $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique. Ainsi ce n'est pas un espace vectoriel.

16) Tout d'abord la suite nulle est arithmétique. Ensuite, donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites arithmétiques et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe alors q et r tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ et $v_{n+1} = rv_n$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1}+v_{n+1} = u_n+q+v_n+r = u_n+v_n+(q+r)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda u_{n+1} = \lambda(u_n+q) = \lambda u_n + (\lambda q)$$

si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmétiques. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ainsi F est un espace vectoriel.

17) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Rappelons que $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Tout d'abord il contient la suite nulle (il suffit de considérer $u_0 = u_1 = 0$). Ensuite, donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $E_{a,b}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2}+v_{n+2} = (au_{n+1}+bu_n)+(av_{n+1}+bv_n) = a(u_{n+1}+v_{n+1})+b(u_n+v_n),$$

et

$$\lambda u_{n+2} = \lambda(au_{n+1}+bu_n) = a(\lambda u_{n+1})+b(\lambda u_n),$$

si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ et $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Ainsi $E_{a,b}$ est un espace vectoriel.

18) Non car la suite nulle ne converge pas vers -1.

19) Non car $X^n \in F$ et $-X^n \in F$ alors que $X^n + (-X^n) = 0 \notin F$.

20) Le polynôme A divise le polynôme nul donc $O \in F$. Donnons-nous P et Q dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition il existe deux polynômes B et C tels que $P = AB$ et $Q = AC$ donc $\lambda P + Q = A(\lambda B + C)$. Ainsi A divise $\lambda P + Q$. Autrement dit $\lambda P + Q \in F$. Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On en déduit que F est un espace vectoriel.

21) On a $\{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, 0 \text{ est racine } P\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, X \text{ divise } P\}$ est un espace vectoriel d'après la question précédente.

22) Ce n'est pas un espace vectoriel car X^2 et $X^2(X-1)$ ont 0 pour racine double mais 0 est de multiplicité triple dans $X^3 = X^2(X-1) + X^2$.

23) Non car $x \longmapsto x^2$ s'annule, $x \longmapsto x+1$ aussi mais $x \longmapsto x^2 + x + 1$ ne s'annule pas.

24) La fonction nulle est T-périodique donc elle appartient à F. Donnons-nous f et g dans F (c'est-à-dire deux fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda f + g)(x+T) = \lambda f(x+T) + g(x+T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x).$$

Ainsi $\lambda f + g$ est T-périodiques sur $\mathbb{R}$ et donc appartient à F. Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On en déduit que F est un espace vectoriel.

25) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet considérons les fonctions $\sin$ (qui est 2π-périodique) et $\phi : x \longmapsto \sin(2\pi x)$ (qui est 1-périodique). Montrons que $\sin + \phi$ n'est pas périodique. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $T > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin + \phi)(x+T) = (\sin + \phi)(x)$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) - \sin(x+T) = \phi(x+T) - \phi(x) = \sin(2\pi x + 2\pi T) - \sin(2\pi x)$$

donc

$$2\cos\left(x + \frac{T}{2}\right)\sin\left(-\frac{T}{2}\right) = 2\cos\left(2\pi x + \pi T\right)\sin\left(\pi T\right).$$

- Si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $T = 2k\pi$, alors $0 = 2\cos(2\pi x + 2k\pi^2)\sin(2k\pi^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est absurde.
- Sinon on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) = -\frac{2\cos\left(2\pi x + \pi T\right)\sin\left(\pi T\right)}{\sin\left(T/2\right)}$ et donc

$$\cos\left(x\right) = -\frac{2\cos\left(\pi x\right)\sin\left(\pi T\right)}{\sin\left(T/2\right)}.$$

  C'est absurde, car cela signifierait que $\cos$ est 1-périodique.

26) La fonction nulle est affine. Ensuite, donnons-nous f et g deux fonctions affines (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (ax+b) + (cx+d) = (a+c)x + (b+d).$$

donc $f + g$ est affine. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda(ax+b) = (\lambda a)x + (\lambda b)$$

donc λf est affine. L'ensemble des fonctions affines est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ainsi c'est un espace vectoriel.

27) La fonction nulle sur $[a,b]$ n'est pas bijective donc ce n'est pas un espace vectoriel.

28) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Si f désigne la fonction nulle, alors elle est dérivable sur $[a,b]$ et $f(a) = f'(a) = 0$. Ensuite, donnons-nous f et g dans F, c'est-à-dire f et g sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a) = f'(a) = 0 = g'(a) = g'(a)$. Donnons-nous $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f + g$ dérivable sur $[a,b]$ et

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) = 0 + 0 = 0.$$

On a aussi λf dérivable sur $[a,b]$ et

$$(\lambda f)(a) = \lambda f(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) = 0.$$

Ainsi il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

29) On a $\mathrm{I}_n^2 = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_n \in F$. Cependant $(2\mathrm{I}_n)^2 = 4\mathrm{I}_n \neq 2\mathrm{I}_n$ donc $2\mathrm{I}_n \in F$. Ainsi F n'est pas un espace vectoriel.

30) La fonction nulle est continue sur $[a, b]$ et son intégrale est nulle. Donnons-nous f et g dans F et $\lambda \in R$. On a $\lambda f + g$ continue sur $[a, b]$ et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = 0 + 0 = 0$$

donc $\lambda f + g \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $C^0([a, b], \mathbb{R})$. Ainsi c'est un espace vectoriel.

Exercice 2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction : Par l'absurde. Supposons que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Il existe alors $x \in F$ et $y \in G$ tels que $x \notin G$ et $y \notin F$. Ainsi $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ et, puisque $F \cup G$ est un espace vectoriel, $x + y \in F \cup G$. Nous en déduisons que $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Supposons par exemple que $x + y \in F$. Dans ce cas $y = (x + y) - x \in F$, ce qui est absurde. Ainsi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_0, \dots \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{\lambda_0 x}, x \mapsto e^{\lambda_1 x}, x \mapsto e^{\lambda_2 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x}\right)$ est libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction : Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons $f_k : x \longmapsto e^{\lambda_k x}$. Les vecteurs de la famille $\left(f_0, \dots, f_n\right)$ appartiennent bien à $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On s'inspire de la preuve qu'une famille échelonnée de polynômes non nuls est libre. On raisonne par l'absurde et on supposer que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est liée. Il existe alors $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\}$ tels que

$$a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n = 0.$$

Notons k le plus grand indice tel que $a_k \neq 0$. On a alors $a_0 f_0 + \cdots + a_k f_k = 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + a_k e^{\lambda_k x} = 0.$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a_0 e^{(\lambda_0 - \lambda_k)x} + a_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_k)x} + \cdots + a_{k-1} e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x} + a_k = 0.$$

Faisons tendre x vers $+\infty$ et on obtient $a_k = 0$. C'est absurde. Ainsi la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction continue et non constante sur $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, f, f^2, \cdots, f^n)$ est une libre dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction : ***Méthode 1.*** Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a_0 f^0 + \cdots + a_n f^n = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (f(x))^k = 0.$$

Si on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors on a $P(f(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit P s'annule sur $f(\mathbb{R})$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le TVI. Comme f est non constante, elle prend au moins deux valeurs distinctes donc $f(\mathbb{R})$ est un intervalle contenant deux valeurs distinctes : il en contient donc une infinité. Ainsi P est le polynôme nul et donc $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 5. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $v_n = n$, $w_n = 2^n$ et $x_n = 3^n$. Montrer que (u, v, w, x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction : Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta x=0$. On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n=\alpha u_n+\beta v_n+\gamma w_n+\delta x_n=(\alpha u+\beta v+\gamma w+\delta x)_n=0.$$

Évaluons en plusieurs valeurs de n :

- Si $n=0$, $\alpha+\gamma+\delta=0$,
- Si $n=1$, $\alpha+\beta+2\gamma+3\delta=0$,
- Si $n=2$, $\alpha+2\beta+4\gamma+9\delta=0$,
- Si $n=3$, $\alpha+3\beta+8\gamma+27\delta=0$.

Or nous avons

$$\begin{cases}\alpha & & +\gamma & +\delta & =0\\ \alpha & +\beta & +2\gamma & +3\delta & =0\\ \alpha & +2\beta & +4\gamma & +9\delta & =0\\ \alpha & +3\beta & +8\gamma & +27\delta & =0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha & & +\gamma & +\delta & =0 & \\ & \beta & +\gamma & +2\delta & =0 & L_2\leftarrow L_2-L_1\\ & 2\beta & +3\gamma & +8\delta & =0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\\ & 3\beta & +7\gamma & +26\delta & =0 & L_4\leftarrow L_4-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha & & +\gamma & +\delta & =0 & \\ & \beta & +\gamma & +2\delta & =0 & \\ & & \gamma & +4\delta & =0 & L_3\leftarrow L_3-2L_2\\ & & 4\gamma & +20\delta & =0 & L_4\leftarrow L_4-3L_2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha & & +\gamma & +\delta & =0 & \\ & \beta & +\gamma & +2\delta & =0 & \\ & & \gamma & +4\delta & =0 & \\ & & & 4\delta & =0 & L_4\leftarrow L_4-4L_3\end{cases}$$

Par remontées successives, on trouve $\delta=0$, puis $\gamma=0$, puis $\beta=0$ et $\alpha=0$.

Ainsi (u,v,w,x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6. Soit $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (x_5,x_1), 2) $(x_1,2x_2,3x_3)$, 3) $(x_1,2x_3+x_2,x_5+3x_1)$, 4) $(x_1,x_1-3x_2,x_3+2x_2,2x_3+x_2)$.

Correction :

1) Soient a et b deux scalaires tels que $ax_5+bx_1=0$. Autrement dit $bx_1+0x_2+0x_3+0x_4+ax_5=0$. Comme $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre, on en déduit que les 5 scalaires de cette décomposition sont nuls. Ainsi $a=b=0$ et donc (x_5,x_1) est libre.
2) Soient a,b,c des scalaires tels que $ax_1+b2x_2+cx_3=0$. Autrement dit $ax_1+b2x_2+cx_3+0x_4+0x_5=0$. Comme $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre, on en déduit que les 5 scalaires de cette décomposition sont nuls. Ainsi $a=2b=3c=0$ donc $a=b=c=0$ et donc $(x_1,2x_2,3x_3)$ est libre.
3) Soient a,b,c des scalaires tels que $ax_1+b(2x_3+x_2)+c(x_5+3x_1)=0$. Autrement dit $(a+3c)x_1+bx_2+2bx_3+0x_4+cx_5=0$. Comme $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre, on en déduit que les 5 scalaires de cette décomposition sont nuls. Ainsi $a+3c=b=c=0$ donc $a=b=c=0$ et donc $(x_1,2x_3+x_2,x_5+3x_1)$ est libre.
4) Soient a,b,c,d des scalaires tels que $ax_1+b(x_1-3x_2)+c(x_3+2x_2)+d(2x_3+x_2)=0$. Autrement dit $(a+b)x_1+(-3b+2c+d)x_2+(c+2d)x_3+0x_4+0x_5=0$. Comme $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre, on en déduit que les 5 scalaires de cette décomposition sont nuls. Ainsi $a+b=-3b+2c+d=c+2d=0$ donc $a=-b$, $c=-2d$ et $-3b-3d=0$ donc $a=-b$, $d=-b$ et $c=2b$.

   On peut prendre, par exemple, $b=1$, $a=-1$, $c=2$ et $d=-1$. On vérifie que

   $$-x_1+(x_1-3x_2)+2(x_3+2x_2)-(2x_3+x_2)=0.$$

   Ainsi $(x_1,2x_3+x_2,x_5+3x_1)$ est liée.

Exercice 7. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles $(x_1-x_2,x_2-x_3,\dots,x_n-x_1)$ et $(x_1,x_1+x_2,\dots,x_1+\dots+x_n)$ sont-elles encore libres ?

Correction :

- On remarque que
$$(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_1)=\sum_{k=1}^{n-1}(x_k-x_{k+1})+x_n-x_1=x_1-x_n+x_n-x_1=0.$$
Ainsi $(x_1-x_2, x_2-x_3, \ldots, x_n-x_1)$ est liée.
- Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que
$$\lambda_1 x_1+\lambda_2(x_1+x_2)+\cdots+\lambda_n(x_1+\cdots+x_n)=0.$$
On a donc $(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x_1+(\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x_2+\cdots+\lambda_n x_n=0$. Comme $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre, on a
$$\lambda_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n=\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+\lambda_n=\cdots=\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0.$$
On trouve que $\lambda_n=0$, puis $\lambda_{n-1}=0$, etc. puis $\lambda_1=0$. Ainsi $(x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+\cdots+x_n)$ est libre.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
On exprimera la matrice des coordonnées d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base en utilisant ses dérivées successives.

Correction : *Si $a=0$, on retrouve la base canonique.*
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la formule de Taylor pour les polynôme entraîne que
$$P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \in \operatorname{Vect}\left(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right).$$
car $\mathbb{R}_n[X] \subset \operatorname{Vect}\left(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$. L'inclusion réciproque est immédiate. Ainsi $\left((X-a)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. Comme c'est une famille échelonnée en degré qui ne contient pas le polynôme nul, elle est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

La matrice $\begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ \dfrac{P^{(2)}(a)}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de P dans la base.

Exercice 9. Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u \in \mathbb{R}^2$).
On montrera qu'une famille de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Correction : *Cet exercice sera un jeu d'enfant lorsque nous aurons vu la théorie de la dimension.*

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas $\{(0,0)\}$. Il existe alors $(a,b) \in F \backslash \{(0,0)\}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot (a,b) \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Ainsi la droite vectorielle $D=\{\lambda \cdot (a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans F.

- Ou bien $F=D$.
- Ou bien D est strictement incluse dans F. Dans ce cas, il existe $(c,d) \in F \backslash D$. Montrons qu'alors $F=\mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de (a,b) et (c,d) (et donc est un élément de F). Donnons-nous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y)=\alpha(a,b)+\beta(c,d)$, c'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$
Mais puisque (a,b) et (c,d) ne sont pas colinéaires, on a $ad-bc \neq 0$ et donc la matrice $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Il suffit alors de prendre (α, β) tels que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien montré que $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Vect}((a,b),(c,d)) \subset F$ et donc $F=\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice simple.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\}$.
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+7z=y\}$.
3) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
4) $\{(z, x-y+z, 2x) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5) $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(2)=0\}$.
6) $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, P(1-X)=P(X)\}$.
7) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \geqslant 4,\ u_n=0\}$.

Correction : Notons F les ensembles de chaque question.

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(x,y) \in F \iff x+y=0 \iff y=-x \iff (x,y)=x(1,-1).$$

Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big((1,-1)\big)$ est un un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x,y,z) \in F \iff x+7z=y \iff (x,y,z)=x(1,1,0)+z(0,7,1).$$

Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big((1,1,0),(0,7,1)\big)$ est un un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F \iff x-y+z=0 \ \text{ et } \ 2x-y=0 &\iff 2x=y \ \text{ et } \ z=x \\ &\iff (x,y,z)=x(1,2,1).\end{aligned}$$

Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big((1,2,1)\big)$ est un un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4) On a

$$\begin{aligned} F = \{(z, x-y+z, 2x) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} &= \{x(0,1,2)+y(0,-1,0)+z(1,1,0) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \operatorname{Vect}\big((0,1,2),(0,-1,0),(1,1,0)\big). \end{aligned}$$

Et cela montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5) Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(2)=0 \\ &\iff X-2 \big| P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad P=(X-2)Q \\ &\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad P=(X-2)(a+bX+cX^2+dX^3) \\ &\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad P=a(X-2)+bX(X-2)+cX^2(X-2)+dX^3(X-2) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big((X-2), X(X-2), X^2(X-2), X^3(X-2)\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

6) Soit $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F \iff P(1-X)=P(X) &\iff a(1-X)^2+b(1-X)+c=aX^2+bX+c \\ &\iff a-2aX+aX^2+b-bX=aX^2+bX \\ &\iff a+b=0 \ \text{ et } \ -2a-b=b \\ &\iff b=-a \\ &\iff P=aX^2-aX+c=a(X^2-X)+c. \end{aligned}$$

Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big(1, X^2-X\big)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

7) Notons $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \geqslant 4,\ u_n=0\}$ et posons
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $a_0=1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_n=0$.
   - $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $b_0=1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $b_n=0$.
   - $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $c_0=1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$, $c_n=0$.

- $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $d_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{3\}$, $d_n=0$.

Ces quatre suites appartiennent à F et, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=u_0\cdot(a_n)_{n\in\mathbb{N}}+u_1\cdot(b_n)_{n\in\mathbb{N}}+u_2\cdot(c_n)_{n\in\mathbb{N}}+u_3\cdot(d_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi $F=\mathrm{Vect}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}},(c_n)_{n\in\mathbb{N}},(d_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. Et cela montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 11. Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$.
On commencera par traiter les cas où $n=2$ puis $n=3$.

Correction : A COMPLETER

On commence par de petites valeurs de n.

- Supposons que $n=2$. Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

— $$M\in\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad M=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$$
$$\iff \exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad M=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

Autrement dit $\left(E_{11},E_{22}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

— $$M\in\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$$
$$\iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Autrement dit $\left(E_{11},E_{22},E_{21}+E_{12}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

— $$M\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \iff \exists!b\in\mathbb{R},\quad M=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Autrement dit $\left(E_{21}-E_{12}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

— $$M\in\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$$
$$\iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$.

Autrement dit $\left(E_{11},E_{22},E_{12}\right)$ est une base de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$.

- Supposons que $n=3$. Soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

— $$M\in\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$$
$$\iff \exists!(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\quad M=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit (E_{11}, E_{22}, E_{33}) est une base de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

$$\iff \exists!(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6, \quad M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32})$ est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \iff \exists!(b,c,e) \in \mathbb{R}^3, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \exists!(b,c,e) \in \mathbb{R}^3, \quad M = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $(E_{12}-E_{21}, E_{13}-E_{31}, E_{23}-E_{32})$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{T}_3^+(\mathbb{R}) \iff \exists!(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

$$\iff \exists!(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6, \quad M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

Autrement dit $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23})$ est une base de $\mathcal{T}_3^+(\mathbb{R})$.

- Traitons le cas général. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

— $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe des uniques scalaires $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ (*les coefficients diagonaux*) tels que

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii}.$$

Ainsi $(E_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe des uniques scalaires $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ (*les coefficients diagonaux*) et

$$a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, a_{23}, a_{24}, \ldots, a_{2n}, a_{34}, \ldots, a_{3n}, \ldots, a_{(n-1)n}$$

(*tous les $a_{i,j}$ où $i < j$... puisque $a_{ji} = a_{ij}$ pour tout i, j*) tels que

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}).$$

Ainsi $\big(E_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n, E_{ij}+E_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\big)$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe des uniques scalaires

$$a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{23}, a_{24}, \dots, a_{2n}, a_{34}, \dots, a_{3n}, \dots, a_{(n-1)n}$$

(*tous les $a_{i,j}$ où $i<j$... puisque $a_{ji} = -a_{ij}$ pour tout i, j. Cette fois les coefficients diagonaux sont nuls*) tels que

$$A = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(E_{ij} - E_{ji}).$$

Ainsi $\big(E_{ij} - E_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\big)$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

— $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe des uniques scalaires $a_{11}, \dots, a_{nn}$ (*les coefficients diagonaux*) et

$$a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{23}, a_{24}, \dots, a_{2n}, a_{34}, \dots, a_{3n}, \dots, a_{(n-1)n}$$

tels que

$$A = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}^{n} a_{ii} E_{ii}.$$

Ainsi $\big(E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\big)$ est une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Trouver un système d'équations[1] du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille de vecteurs $\big((1,0,2,1),(0,3,-1,2),(3,-3,7,1)\big)$. Est-ce une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Une base de $\mathbb{R}^4$?

Correction : Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \quad &\iff \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z,t) = a(1,0,2,1) + b(0,3,-1,2) + c(3,-3,7,1) \\
&\iff \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z,t) = (a+3c, 3b-3c, 2a-b+7c, a+2b+c).
\end{aligned}$$

Ainsi $(x,y,z,t) \in F$ si et seulement si le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccc}
a & + & & - & 3c & = & x \\
 & & 3b & - & 3c & = & y \\
2a & - & b & + & 7c & = & z \\
a & + & 2b & + & c & = & t
\end{array}\right.$$

d'inconnues a, b, c admet (au moins) une solution. On a

$$\begin{aligned}
(S) \quad &\iff \left\{\begin{array}{ccccccccl}
a & + & & + & 3c & = & x & & \\
 & & 3b & - & 3c & = & y & & \\
 & - & b & + & c & = & z-2x & & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
 & & 2b & - & 2c & = & t-x & & L_4 \leftarrow L_4 - L_1
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccccl}
a & + & & + & 3c & = & x & & \\
 & & 3b & - & 3c & = & y & & \\
 & & & & 0 & = & 3(z-2x)+y & & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\
 & & & & 0 & = & 3(t-x)-2y & & L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_2
\end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc}
a & + & & + & 3c & = & x \\
 & & 3b & - & 3c & = & y \\
 & & & & 0 & = & -6x+y+3z \\
 & & & & 0 & = & -3x-2y+3t
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Si $0 = -6x+y+3z = -3x-2y+3t$, alors $(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & & + & 3c & = & x \\ & & 3b & - & 3c & = & y \end{array}\right.$. Dans ce cas (S) admet une solution : $a = x$, $b = y/3$, $c = 0$. Dans ce cas $(x,y,z,t) \in F$.

Si l'un des deux équation est fausse, alors (S) n'admet pas de solution. Dans ce cas $(x,y,z,t) \notin F$.

On en déduit que $(x,y,z,t) \in F$ si et seulement si $-6x+y+3z = 0$ et $-3x-2y+3t = 0$.

1. C'est-à-dire un système dont l'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel concerné.

Exercice 13. (★ à ★★) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$,

2) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+2y+3z-t=0\}$ dans $\mathbb{R}^4$,

3) $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(1)=P'(1)=0\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$,

4) $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(1)=P(0)\}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction : Notons F le sous-espace vectoriel de chaque question.

1) La famille $\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ est-elle libre ? On se donne λ, μ et γ des scalaires tels que $\lambda(3,1,-7)+\mu(4,-2,-8)+\gamma(-3,4,5)=(0,0,0)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda & + & 4\mu & - & 3\gamma & = & 0 \\ \lambda & - & 2\mu & + & 4\gamma & = & 0 \\ -7\lambda & - & 8\mu & + & 5\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda & + & 4\mu & - & 3\gamma & = & 0 \\ & - & 10\mu & + & 15\gamma & = & 0 \\ & & 4\mu & - & 6\gamma & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + 7L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\lambda & + & 4\mu & - & 3\gamma & = & 0 \\ & - & 10\mu & + & 15\gamma & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\lambda & + & 4\mu & = & 3\gamma \\ & & \mu & = & 3\gamma/2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\gamma \\ \mu & = & 3\gamma/2 \end{array}\right.$$

Si on prend, par exemple, $\gamma=2$, $\mu=3$ et $\lambda=-2$, alors

$$-2(3,1,-7)+3(4,-2,-8)+2(-3,4,5)=(0,0,0).$$

La famille est liée. On en déduit par ailleurs que

$$F=\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)=\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(-3,4,5)\big).$$

Comme $(3,1,-7)$ et $(-3,4,5)$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que la famille $\big((3,1,-7),(-3,4,5)\big)$ est une base de F.

2) Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(x,y,z,t) \in F \iff x+2y+3z=t \iff (x,y,z,t)=x(1,0,0,1)+y(0,1,0,2)+z(0,0,1,3).$$

Ainsi $F=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3)\big)$.

Donnons-nous a,b,c des scalaires tels que $a(1,0,0,1)+b(0,1,0,2)+c(0,0,1,3)=(0,0,0,0)$. On a alors $a=0$, $b=0$, $c=0$, $a+2b+3c=0$ et donc la famille est libre. On en déduit que $\big((1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,3)\big)$ est une base de F.

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F \iff P(1)=P'(1)=0 & \iff (X-1)^2 \,|\, P \\ & \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{2n-2}[X], \quad P=(X-1)^2 Q \\ & \iff \exists (a_0,\dots,a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad P=(X-1)^2 \sum_{k=0}^{2n-2} a_k X^k \\ & \iff \exists (a_0,\dots,a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad P=\sum_{k=0}^{2n-2} a_k X^k (X-1)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\big((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2, \dots, X^{2n-2}(X-1)^2\big)$ engendre F. Cette famille est libre car échelonnée en degré sans contenir le polynôme nul. C'est donc une base.

4) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \\ &\iff \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \\ &\iff \quad a_1 = -\sum_{k=2}^{n} a_k \\ &\iff \quad P = a_0 - \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) X + \sum_{k=2}^{n} a_k X^k \\ &\iff \quad P = a_0 + \sum_{k=2}^{n} a_k (X^k - X). \end{aligned}$$

On en déduit que $\left(1, X^2 - X, X^3 - X, X^4 - X, \dots, X^n - X\right)$ engendre F. Cette famille est libre car échelonnée en degré sans contenir le polynôme nul. C'est donc une base.

Exercice 14. Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. Introduisons les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = (X - a)$ et $P_2 = (X - a)(X - b)$.

1) A l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice des coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2) en fonction de $P(a), P(b), P(c)$.

Correction :

1) Déjà il s'agit d'une famille de polynômes échelonnée en degré donc elle est libre.
   Ensuite, donnons-nous $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Le théorème de division euclidienne nous assure qu'il existe des polynômes Q et R tels que $P = (X - a)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X - a)$. Ainsi R est un polynôme constant.

   Par ailleurs $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ et le théorème de division euclidienne nous assure qu'il existe des polynômes $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{R}$ tels que $Q = (X - b)\widetilde{Q} + \widetilde{R}$ et $\deg(\widetilde{R}) < \deg(X - b)$. Ainsi $\widetilde{R}$ est un polynôme constant. Par ailleurs $\widetilde{Q}$ est aussi un polynôme constant.

   Notons alors α, β et γ les constants auxquelles sont respectivement égales les polynômes R, $\widetilde{Q}$ et $\widetilde{R}$. On a alors

   $$P = (X - a)Q + R = (X - a)\big((X - b)\widetilde{Q} + \widetilde{R}\big) + R = \beta(X - a)(X - b) + \gamma(X - a) + \alpha.$$

   Ainsi (P_0, P_1, P_2) engendre $\mathbb{R}_2[X]$. Il s'agit donc d'une base.
2) Évaluons en a : on a $P(a) = 0 + 0 + \alpha$. Évaluons en b : $P(b) = 0 + \gamma(b - a) + P(a)$. Comme $b \neq a$, on en déduit que $\gamma = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$.

   Évaluons enfin en c : $P(c) = \beta(c - a)(c - b) + \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}(c - a) + P(a)$. Comme $c \neq a$ et $c \neq b$, en en déduit que

   $$\beta = \frac{1}{(c - a)(c - b)}\left(P(c) - \frac{P(b) - P(a)}{b - a}(c - a) - P(a)\right) = \frac{P(c) - P(a)}{(c - a)(c - b)} + \frac{P(b) - P(a)}{(b - a)(b - c)}.$$

   On a donc

   $$\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a} \\ \dfrac{P(c) - P(a)}{(c - a)(c - b)} + \dfrac{P(b) - P(a)}{(b - a)(b - c)} \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{E} = \{x \longmapsto P(x)\sin(x) + Q(x)\cos(x) \,|\, (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.

Correction : Si $f \in \mathcal{E}$, alors il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f = P\sin + Q\cos$.

Il existe donc des réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et donc

$$f = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\sin + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\cos = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k \sin) + \sum_{k=0}^{n} b_k (X^k \cos).$$

Ainsi la famille

$$\big(\sin, X\sin, X^2\sin, \dots, X^n\sin, \cos, X\cos, X^2\cos, \dots, X^n\cos\big)$$

engendre $\mathcal{E}$.

Montrons qu'elle est libre : donnons-nous des scalaires $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (X^k \sin) + \sum_{k=0}^{n} b_k (X^k \cos) = 0.$$

On a $2n+2$ inconnues, il nous faut au moins $2n+2$ équations. On va les obtenir en évaluant en des points bien choisis.

Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, évaluons en $2\ell\pi$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k (2\ell\pi)^k \sin(2\ell\pi) + \sum_{k=0}^{n} b_k (2\ell\pi)^k \cos(2\ell\pi) = \sum_{k=0}^{n} b_k (2\ell\pi)^k.$$

Autrement dit, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ s'annule en une infinité de valeurs (tous les $2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$). Il s'agit donc du polynôme nul : $b_0 = \cdots = b_n = 0$.

On en déduit que $0 = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k \sin)$. Ainsi, pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Autrement dit, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ s'annule en une infinité de valeurs (tous les réels qui ne sont pas multiples de π). Il s'agit donc du polynôme nul : $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

On en déduit que la famille est libre. C'est donc une base.

Exercice 16. On considère l'ensemble

$$F = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c\right\}.$$

1) Montrer que F est un espace vectoriel. En déterminer une base.
2) Est-ce que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\, x \mapsto 1,\, x \mapsto \cos(2x)\big)$ est une base de F ?
   On utilisera les formules de trigonométrie usuelles, montrée dans l'exercice 1 du TD n° 5.
3) Montrer que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\, x \mapsto \sin^2(x),\, x \mapsto \cos(x)\big)$ est une base de F.
4) Déterminer la matrice des coordonnées de $f : x \longmapsto 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$ dans les deux bases de F que l'on a déterminées.

Correction : Notons $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \longmapsto \cos(2x)$.

1) On a $F = \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, f_2\right)$ donc F est un espace vectoriel dont $\left(f_0, f_1, f_2\right)$ est génératrice. Montrons que cette famille est libre : donnons-nous des scalaires a, b, c tels que $af_0 + bf_1 + cf_2 = 0$.

- Évaluons en 0 : $0 = af_0(0) + bf_1(0) + cf_2(0) = a + b + c$.
- Évaluons en π : $0 = af_0(\pi) + bf_1(\pi) + cf_2(\pi) = a - b + c$.
- Évaluons en $\pi/2$: $0 = af_0(\pi/2) + bf_1(\pi/2) + cf_2(\pi/2) = a - c$.

En soustrayant les deux premières équations, on trouve $0 = 2b$ donc $b = 0$. On a donc $a + c = 0$ et $a - c = 0$ si bien que $a = c = 0$. Ainsi la famille $\left(f_0, f_1, f_2\right)$ est libre et donc c'est une base.

2) On a $cos^2 = \dfrac{1}{2}f_1 + \dfrac{1}{2}f_0$ donc la famille est liée.

3) On a

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^2(x),\, x \mapsto \cos(x),\, x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^2(x),\, x \mapsto \cos(x),\, x \mapsto \cos^2(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \cos^2(x),\, x \mapsto \cos(x),\, x \mapsto \sin^2(x)\right) \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une famille génératrice. Montrons que cette famille est libre : donnons-nous des scalaires a, b, c tels que $a\cos^2 + b\sin^2 + c\cos = 0$.

- Évaluons en 0 : $0 = a + 0 + c$.
- Évaluons en $\pi/2$: $0 = 0 + b + 0$.
- Évaluons en π : $0 = a + 0 - c$.

Ainsi $a = b = c = 0$. La famille est donc libre. Ainsi c'est bien d'une base de f.

4) Dans la première base la matrice des coordonnées de f est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $f = 1 + \cos + \cos^2 = \cos^2 + \sin^2 + \cos + \cos^2 = 2\cos^2 + \sin^2 + \cos$. Dans la deuxième base la matrice des coordonnées de f est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. Introduisons $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \middle| (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ (*la plus simple possible*) de $\mathcal{A}$.
3) A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing$.
4) Soit $M \in \mathcal{A}$.
   a) Calculer M^2 et M^3. Remarquer que $M^3 \in \mathcal{A}$.
   b) Exprimer la matrice des coordonnées de M^3 dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de M.
   c) En déduire un polynôme annulateur de M.
   d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer M^k en fonction de k, M, M^2 et des coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.

Correction :

1) Commençons par remarquer que $\mathrm{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ si bien que $\mathrm{O}_3 \in \mathcal{A}$.

Ensuite donnons-nous $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{A}$, ainsi que

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\lambda M + \mu M' &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\lambda c + \mu c') & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & 0 & -(\lambda a + \mu a') \\ -(\lambda b + \mu b') & \lambda a + \mu a' & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Notons $A = E_{3,2} - E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = E_{1,3} - E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$C = E_{2,1} - E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^*$, alors $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = a\,A + b\,B + c\,C$.

Nous en déduisons que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(A, B, C)$. Montrons que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$ est libre : donnons-nous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\,A + b\,B + c\,C = \mathrm{O}_n$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = b = c = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Puisqu'elle engendre $\mathcal{A}$, nous en déduisons que (A, B, C) est une base de $\mathcal{A}$.

3) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- Si $b = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
  - — Si $c = 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, on obtient une matrice dont la diagonale est nulle. La matrice M n'est donc pas inversible dans ce cas.
  - — Si $c \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 2, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. En faisant l'opération $L_3 \leftarrow cL_3 + aL_2$, on obtient $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'étant pas inversible (sa diagonale contient un 0), on en déduit que la matrice M non plus.
- Si $b \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, puis en faisant l'opération $L_2 \leftarrow bL_2 + cL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$.
  - — Si $a = 0$, alors en échangeant les lignes 2 et 3 on obtient une matrice triangulaire dont la diagonale contient 0. On en déduit que M n'est pas inversible.
  - — Si $a \neq 0$ alors, on faisant l'opération $L_3 \leftarrow aL_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M n'est pas inversible.

Finalement aucune matrice de $\mathcal{A}$ n'est inversible. On a bien $\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing$.

4) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

a) On calcule que $M^2 = \begin{pmatrix} -(b^2+c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2+c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2+b^2) \end{pmatrix}$ et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & c(a^2+b^2+c^2) & -b(a^2+b^2+c^2) \\ -c(a^2+b^2+c^2) & 0 & a(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) & -a(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

donc $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M \in \mathcal{A}$.

b) Puisque $M = a\,A + b\,B + c\,C$ et que $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, on en déduit que le triplet de cordonnées de M^3 dans $\mathcal{B}$ est $(-a(a^2+b^2+c^2), -b(a^2+b^2+c^2), -c(a^2+b^2+c^2))$.

c) On obtient également que $M^3 + (a^2+b^2+c^2)M = \mathrm{O}_3$. Par conséquent le polynôme $X^3 + (a^2+b^2+c^2)X$ annule M.

d) On a $M^0 = \mathrm{I}_3$, $M^1 = M$, $M^2 = M^2$, $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, puis

$$M^4 = M^3\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^2,$$
$$M^5 = M^4\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^3 = (a^2+b^2+c^2)^2 M,$$
$$M^6 = M^5\,M = (a^2+b^2+c^2)^2 M^2,$$
$$M^7 = M^6\,M = (a^2+b^2+c^2)^2 M^3 = -(a^2+b^2+c^2)^3 M.$$

Par récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$M^{2k} = (-1)^{k-1}(a^2+b^2+c^2)^{k-1}M^2 \qquad \text{et} \qquad M^{2k+1} = (-1)^k (a^2+b^2+c^2)^k M.$$

Exercice 18 (Matrices carrées non nulles de carré nul).

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq \mathrm{O}_n$ et $A^2 = \mathrm{O}_n$.

1) Montrer qu'une telle matrice A existe (*on donnera un exemple simple*).

2) Montrer que A n'est pas inversible.

3) Justifier brièvement que $\mathcal{E} = \{\alpha \mathrm{I}_n + \beta A \,|\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel dont (I_n, A) est une base.

Donnons-nous $B \in \mathcal{E}$ dont les coordonnées dans la base (I_n, A) sont les réels α et β. C'est-à-dire $B = \alpha \mathrm{I}_n + \beta A$.

4) a) Montrer que $B^2 = 2\alpha B - \alpha^2 \mathrm{I}_n$. En déduire un polynôme annulateur de B.
   b) Supposons que $\alpha \neq 0$. En déduire que B est inversible. Remarquer alors que B^{-1} appartient encore à $\mathcal{E}$ et exprimer la matrice de ses coordonnées dans la base (I_n, A).
   c) Montrer que si $\alpha = 0$, alors B n'est pas inversible.

5) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer B^p. Remarquer que B^p appartient encore à $\mathcal{E}$ et et exprimer la matrice de ses coordonnées dans la base (I_n, A).

6) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} B^k$.
   a) Supposons que $\alpha = 1$. Justifier que $S_p \in \mathcal{E}$ puis exprimer la matrice de ses coordonnées dans la base (I_n, A).
   b) Supposons que $\alpha \neq 1$. Montrer que $S_p = f_p(\alpha)\mathrm{I}_n + \beta f_p'(\alpha) A$, où f_p est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (*que l'on explicitera sous forme d'une fraction rationnelle*).
   c) Expliciter $f_p'(\alpha)$ sous forme de fraction lorsque $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Correction :

1) Si A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls celui d'indice $(1, n)$ qui vaut 1, alors $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. En effet

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!], \qquad (A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} = 0$$

(car le terme $a_{1,n}^2$, le seul non nul, n'apparait jamais dans cette somme).

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que A est inversible. On a alors $A = A^2A^{-1} = 0$. C'est absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

3) On remarque que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A)$. Ainsi $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.
Par définition (I_n, A) est génératrice de $\mathcal{E}$. Montrons qu'elle est libre. Donnons-nous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\mathrm{I}_n + \beta A = 0$. Multiplions par A : $\alpha A + \beta A^2 = 0$ donc $\alpha A = 0$ et donc $\alpha = 0$ puisque $A \neq 0$. Il s'ensuit que $\beta A = 0$ et donc $\beta = 0$. Ainsi la famille (I_n, A) est une base de $\mathcal{E}$.

4) a) On a $B^2 = (\alpha\mathrm{I}_n + \beta A)^2 = \alpha^2\mathrm{I}_n + 2\alpha\beta A + \beta^2 A = \alpha^2\mathrm{I}_n + 2\alpha(B - \alpha\mathrm{I}_n) + 0 = 2\alpha B - \alpha^2\mathrm{I}_n$.

Un polynôme annulateur de B est donc $X^2 - 2\alpha X + \alpha^2 = (X - \alpha)^2$.

b) On a donc $\alpha^2\mathrm{I}_n = 2\alpha B - B^2 = B(2\alpha\mathrm{I}_n - B)$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\mathrm{I}_n = B\left(\dfrac{2}{\alpha}\mathrm{I}_n - \dfrac{1}{\alpha^2}B\right)$. Nous en déduisons que B est inversible et

$$B^{-1} = \frac{2}{\alpha}\mathrm{I}_n - \frac{1}{\alpha^2}B = \frac{2}{\alpha}\mathrm{I}_n - \frac{1}{\alpha^2}(\alpha\mathrm{I}_n + \beta A) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{I}_n - \frac{\beta}{\alpha^2}A.$$

Ainsi $B^{-1} \in \mathcal{E}$ et les coordonnées de B^{-1} dans la base (I_n, A) sont alors $\left(\dfrac{1}{\alpha}, -\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right)$.

c) Si $\alpha = 0$, alors $B = \beta A$.

- Si $\beta = 0$, alors $B = 0$ n'est pas inversible.
- Si $\beta \neq 0$, alors B n'est pas inversible car sinon A le serait.

Ainsi B n'est pas inversible.

5) Puisque les matrices $\alpha\mathrm{I}_n$ et βA commutent, la formule du binôme de Newton entraîne que

$$B^p = (\alpha\mathrm{I}_n + \beta A)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(\beta A)^k(\alpha\mathrm{I}_n)^{p-k} = (\alpha\mathrm{I}_n)^p + p(\beta A)(\alpha\mathrm{I}_n)^{p-1} + 0,$$

puisque $A^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Ainsi $B^p = \alpha^p\mathrm{I}_n + p\beta\alpha^{p-1}A \in \mathcal{E}$.

6) a) Supposons que $\alpha = 1$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 1^k\mathrm{I}_n + k\beta 1^{k-1}A = \mathrm{I}_n + k\beta A$. Ainsi

$$S_p = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{p} B^k = \left(\sum_{k=0}^{p} 1\right)\mathrm{I}_n + \beta\left(\sum_{k=0}^{p} k\right)A = (p+1)\mathrm{I}_n + \beta\frac{p(p+1)}{2}A \in \mathcal{E}$$

b) Supposons que $\alpha \neq 1$. On a alors

$$S_p = \mathrm{I}_n + \sum_{k=1}^{p} B^k = \left(\sum_{k=0}^{p} \alpha^k\right)\mathrm{I}_n + \beta\left(\sum_{k=1}^{p} k\alpha^{k-1}\right)A.$$

La fonction $f_p : t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{p} t^k = \frac{1 - t^{p+1}}{1 - t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et on a $\boxed{S_p = f_p(\alpha)\mathrm{I}_n + \beta f_p'(\alpha)A.}$

c) On a $f_p'(\alpha) = \dfrac{-(p+1)\alpha^p(1-\alpha) + 1 - \alpha^{p+1}}{(1-\alpha)^2} = \dfrac{1 - (p+1)\alpha^p + p\alpha^{p+1}}{(1-\alpha)^2}$.