Correction de quelques exercices de la feuille de TD 1

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. A l'aide de tables de vérité, montrer que :
1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$. 2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) On construit les tables de vérité de $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C})$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$	$(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ et $\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$	$(\mathcal{A}$ et $\mathcal{C})$ ou $(\mathcal{B}$ et $\mathcal{C})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Ainsi $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C})$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$ sont équivalentes.
Ainsi $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow \big(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}\big)$ est vraie.

Exercice 3. Écrire la négation des phrases suivantes et les traduire en français (sauf les 6, 11 et 14) :

1) $x > 3 \implies f(x) \leqslant 5$.
2) $-4 \leqslant x < 2$.
3) $y < -3 \text{ ou } y > 12$.
4) $a < b < c < d$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$.
6) Si $r \in \mathbb{Q}$, alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
7) $\forall x > 1,\ \exists k \in \mathbb{N},\ x^k \geqslant 2023$.
8) $P(0) \text{ et } \big(\forall n \in \mathbb{N},\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))\big)$.
9) $(x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ ou } (x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)$.
10) $\forall a \in A,\ \forall b \in A,\ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
11) Tous les élèves de moins de quinze ans ou de plus de dix-huit ans ont une note comprise entre 8 et 15.
12) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \big(x^n = y^n$ et $x \neq y\big)$.
13) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon)$.
14) Il n'a plu qu'un seul jour cette semaine.
15) $\exists! z \in E,\ g(z) = 0$.

Correction : Toutes ont été traitée en cours sauf les suivantes :

9) <u>Négation :</u> $\text{non}\big((x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ ou } (x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)\big)$.

$$\iff \text{non}(x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ et } \text{non}(x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)$$
$$\iff \big(\text{non}(x > -1) \text{ ou } \text{non}(f(x) = 0)\big) \text{ et } \big(\text{non}(x \leqslant -1) \text{ ou } \text{non}(g(x) = 0)\big)$$
$$\iff (x \leqslant -1 \text{ ou } f(x) \neq 0) \text{ et } \big(x > -1 \text{ ou } g(x) \neq 0\big)$$

10) <u>Traduction :</u> Si a et b sont deux éléments de A dont le produit est nul, alors l'un des deux est nul.
<u>Négation :</u> $\text{non}\big(\forall a \in A, \forall b \in A,\ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big)$.

$$\iff \big(\exists a \in A,\ \exists b \in A,\ ab = 0 \text{ et } (a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)\big)$$

12) <u>Traduction :</u> Pour tout entier naturel n supérieure ou égal à 2, il existe deux réels x et y tels que $x = y$ et $x^n \neq y^n$.
<u>Négation :</u> $\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big(x^n \neq y^n$ ou $x = y\big)$

13) Traduction : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 non nul tel que tout entier n naturel supérieur à n_0 vérifie $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Cela signifie que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (*on reverra ça dans quelques semaines*).

Négation : $\exists\varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant n_0 \text{ et } \dfrac{1}{n} > \varepsilon\right)$

15) C'est le cas général de l'exemple précédent... Dire qu'il existe un unique élément d'un ensemble satisfaisant une propriété signifie qu'il existe un élément vérifiant la propriété et que tous les autres éléments ne satisfont pas la propriété. Ici on a :

$$\big(\exists! z \in E,\, g(z) = 0\big) \iff \exists z \in E,\ \big((g(z) = 0) \text{ et } (\forall x \in E\backslash\{z\},\ g(x) \neq 0)\big)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{non}\big(\exists! z \in E,\, g(z) = 0\big) &\iff \forall z \in E,\ \big(\operatorname{non}(g(z) = 0) \text{ ou } \operatorname{non}(\forall x \in E\backslash\{z\},\ g(x) \neq 0)\big)\\ &\iff \forall z \in E,\ \big(g(z) \neq 0 \text{ ou } (\exists x \in E\backslash\{z\},\ g(x) = 0)\big).\end{aligned}$$

La négation signifie donc que la fonction g ne s'annule pas ou s'annule au moins deux fois.

Exercice 5. Montrer que les phrases « Ceux qui parlent ne savent pas » et « Ceux qui savent ne parlent pas » sont équivalentes.

Correction : La phrase « Ceux qui parlent ne savent pas » est équivalent à l'implication « parler $\Rightarrow$ non(savoir) ». Elle même est équivalent à sa contraposée « savoir $\Rightarrow$ non(parler) », c'est-à-dire « Ceux qui savent ne parlent pas ».

Exercice 8. A l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Correction :

- *Analyse :* Supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

  $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{= f(x) + f(h) - f(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}.$$

  On remarque que $f'(x)$ ne dépend pas de x. Ainsi f' est une fonction constante. La fonction f est donc affine : il existe deux réels a et b tels que que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $f(2) = f(1+1) = 2f(1)$ donc $2a + b = 2a + 2b$ et donc $b = 0$.
- *Synthèse :* Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

  Par ailleurs f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
- *Conclusion :* Les fonctions recherchées sont les fonctions linéaires.