# Correction des exercices de la feuille de TD 19

**Exercice 1.** Calculer $A+B$, $A-2B$, $AB$ et $BA$ (si c'est possible) lorsque

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1+i & -4i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7i \\ 4-5i & -i \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{17}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{4} \\ 2 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

**Correction :**

1) $A+B$, $A-2B$ et $AB$ ne sont pas définies et $BA = \begin{pmatrix} 22 & -10 & 16 & 16 \\ -6 & -15 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

2) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -6 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A-2B = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 8 \\ 15 & 9 & -4 \\ -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 24 \\ -35 & 2 & -12 \\ -18 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ et

$BA = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 32 \\ 19 & -10 & -48 \\ -9 & -9 & 20 \end{pmatrix}$.

3) $A+B = \begin{pmatrix} -1+i & 2+10i \\ 5-4i & -5i \end{pmatrix}$, $A-2B = \begin{pmatrix} 2+i & 2-11i \\ -7+11i & -2i \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 23+i & -4-2i \\ -21-17i & -11+7i \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -7+6i & 26-3i \\ 6+3i & 19+2i \end{pmatrix}$.

4) $A+B$, $A-2B$ et $BA$ ne sont pas définies et $AB = \begin{pmatrix} -5 & -5 \end{pmatrix}$.

5) $A+B$, $A-2B$ et $AB$ ne sont pas définies et $BA = \begin{pmatrix} -\frac{11}{6} \\ -2 \\ -\frac{23}{10} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.** Calculer la transposée des matrices $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & -i \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 12 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

**Correction :**

$${}^tA = \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ i & -3 \\ 1 & 0 \\ -i & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^tD = D, \quad {}^tE = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** Avec Python, calculer :

1) le produit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 8 \\ 2 & -9 & 11 & 3 \\ -4 & 7 & 5 & -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 12 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

2) la transposée de la matrice obtenue à la question 1.

3) l'inverse de la matrice obtenue à la question 2.

4) la puissance 9 de 10 fois la matrice obtenue à la question 3.

5) la matrice dont les coefficients sont les cosinus de ceux de la matrice obtenue à la question 4.

**Correction :**

```python
#Importations
import numpy as np
import numpy.linalg as al

#Les deux matrices
A=np.array([[0,1,-6,8],[2,-9,11,3],[-4,7,5,-10]])
B=np.array([[1,0,-3],[0,9,12],[-2,3,4],[5,8,0]])

#Question 1
C=np.dot(A,B)
print(C)

#Question 2
D=np.transpose(C)
print(D)

#Question 3
E=al.inv(D)
print(E)

#Question4
F=al.matrix_power(100*E,9)
print(F)

#Question 5
G=np.cos(F)
print(G)
```

**Exercice 4.** Construire en Python :

1) la matrice élémentaire $E_{5,12} \in \mathcal{M}_{8,20}(\mathbb{R})$.

2) la matrice de $\mathcal{M}_{11,7}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $1$ sauf ceux se trouvant sur les lignes $2, 5, 6, 10$ et ceux sur les colonnes $3, 7$ qui valent $0$.

3) la matrice de $\mathcal{M}_{11,7}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $1$ sauf ceux se trouvant à la fois sur les lignes $2, 5, 6, 10$ et sur les colonnes $3, 7$ qui valent $0$.

4) une matrice diagonale d'ordre 7 dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(10, 0.3)$.

5) la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 99 & 100 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 198 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Correction :**

```python
#Importations
import numpy as np
import numpy.linalg as al

#Question 1
E=np.zeros([8,20]); E[4,11]=1
print(E)

#Question 2
A=np.ones([11,7]);
for i in [2,5,6,10]:
    A[i-1,:]=np.zeros([1,7])
for j in [3,7]:
    A[:,j-1]=np.zeros([1,11])
print(A)

#Question 3
B=np.ones([11,7]);
for i in [2,5,6,10]:
    for j in [3,7]:
        B[i-1,j-1]=0
print(B)

#Question 4
import numpy.random as rd
print(np.diag(rd.binomial(10,0.3,7)))

#Question 5
L0=[k for k in range(1,101)]
L1=[2*k for k in range(1,101)]
L2=[0 for k in range(1,101)]
L3=[1 for k in range(1,101)]
L4=[1]+[0 for k in range(2,100)]+[1]
print(np.array([L0,L1,L2,L3,L4]))
```

**Exercice 5.** Implémenter en Python une fonction qui prend en argument deux entiers naturels $n$ et $p$ strictement positifs et qui renvoie la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients sont les entiers de $1$ à $np$ (rangés par ordre croissant ligne par ligne).

**Correction :** Version « mathématique » : La première ligne (celle d'indice $0$) contient les nombres de $1$ à $p$, la deuxième (celle d'indice $1$) les nombres de $p+1$ à $2p = p+p$, la troisième (celle d'indice $2$) les nombres de $2p+1$ à $3p = 2p+p$, etc. Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![0\,;n-1]\!] \times [\![0\,;p-1]\!]$, le coefficient d'indice $(i,j)$ est $ip+j+1$.

```python
import numpy as np
def TableauEntiers(n,p):
    A=np.zeros([n,p])
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            A[i,j]=i*p+j+1
    return A
```

Version « informatique » : on crée un compteur initialisé à 1 et on place ligne par ligne, colonne par colonne, le compteur avant de l'incrémenter de 1.

```python
import numpy as np
def TableauEntiers(n,p):
    A=np.zeros([n,p])
    c=1
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            A[i,j]=c
            c+=1
    return A
```

**Exercice 6.** Construire en Python :

1) une fonction `N` qui prend en argument un entier naturel $n$ non nul et qui renvoie la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 1 sur la première colonne, la dernière colonne et la diagonale, des 0 ailleurs.
2) une fonction `Z` qui prend en argument un entier naturel $n$ non nul et qui renvoie la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 1 sur la première ligne, la dernière ligne et l'antidiagonale, des 0 ailleurs.

*Si vous vous ennuyez, faites pareil avec toutes les lettres de l'alphabet.*

**Correction :**

1)

```
import numpy as np
def N(n):
    A=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        A[i,0]=1
        A[i,i]=1
        A[i,n-1]=1
    return A
```

Alternative :

```
import numpy as np
def N(n):
    A=np.diag(np.ones(n))
    A[:,0]=np.ones(n)
    A[:,n-1]=np.ones(n)
    return A
```

2)

```
import numpy as np
def Z(n):
    A=np.zeros([n,n])
    for j in range(n):
        A[0,j]=1
        A[j,n-1-j]=1
        A[n-1,j]=1
    return A
```

**Exercice 7.** Écrire une fonction en Python qui prend en argument deux entiers naturels $a$ et $n$ non nuls et qui renvoie une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont choisis aléatoirement dans $[\![-a\,;a]\!]$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def MatriceSymetrique(a,n):
    A=rd.randint(-a,a+1,[n,n])
    for i in range(n):
        for j in range(i):
            A[i,j]=A[j,i]
    return A
```

**Exercice 8.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X = {}^t\!\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Expliciter les matrices ${}^tXX$ et $X\,{}^tX$.

**Correction :**

- On a ${}^tXX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et le seul coefficient de cette matrice est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ({}^tX)_{1,k} X_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
  Ainsi ${}^tXX = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
- On a $X\,{}^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $(X\,{}^tX)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} X_{i,k}({}^tX)_{k,j} = x_i x_j$.

**Exercice 9.** Soient $n$ et $p$ des entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^t\!A = \mathrm{O}_n$. En regardant les coefficients diagonaux du produit, montrer que $A = \mathrm{O}_{n,p}$.

**Correction :** Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. On a

$$0 = (A\,{}^t\!A)_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}({}^t\!A)_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \left(A_{i,k}\right)^2.$$

Par conséquent, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $A_{i,k} = 0$. Ainsi tous les coefficients de $A$ sont nuls et donc $A = \mathrm{O}_{n,p}$.

**Exercice 10.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice $(i,j)$ qui est égal à 1. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$.

**Correction :** Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$. Soit $(x,y) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Calculons le coefficient d'indice $(x,y)$ de $E_{i,j}E_{k,\ell}$. On a

$$\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = \sum_{z=1}^{n} \left(E_{i,j}\right)_{x,z}\left(E_{k,\ell}\right)_{z,y}.$$

- Si $x \neq i$ alors, pour tout $z \in [\![1\,;n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = 0$. Nous en déduisons que $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = 0$.
- Si $x = i$ alors, pour tout $z \in [\![1\,;n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = \left(E_{i,j}\right)_{i,z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = j \\ 0 & \text{si} \quad z \neq j \end{cases}$

  Ainsi $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0 + \cdots + 1 \cdot \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y} + \cdots + 0 = \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y}$. Nous en déduisons que

  — Si $k = j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = \ell \\ 0 & \text{si} \quad y \neq \ell \end{cases}$.

  — Si $k \neq j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0$.

Finalement

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si} \quad j = k \\ \mathrm{O}_n & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

**Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

**Correction :** On sait que, pour tout $(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que $\ell < k$, $A_{k\ell} = 0$.

On se donne $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que $j < i$. On a

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{j} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

- Si $k \geqslant j+1$, $B_{kj} = 0$ puisque $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.
- Si $k \leqslant j$, alors $k < i$ et donc $A_{ik} = 0$ puisque $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

Ainsi $(AB)_{ij} = 0$. On en déduit que $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$.

**Exercice 12.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle trace de la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée une matrice $A$ et qui renvoie $\operatorname{tr}(A)$.
2) Soit $(A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
3) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$.
4) Existe-t-il $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$ ?

**Correction :**

1)
```
import numpy as np
def trace(A):
    S=0
    for k in range(len(A)):
        S+=A[i,i]
    return A
```

2) Soit $(A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$.

- On a
$$\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (A+\lambda B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ii} + \lambda B_{ii}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$$
et donc $\operatorname{tr}(A+\lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$.
- On a
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA).$$

3) On a $\operatorname{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{tr}\left((P^{-1}A)P\right) = \operatorname{tr}\left(P(P^{-1}A)\right) = \operatorname{tr}(A)$, d'après la question précédente.

4) Raisonnons-par l'absurde et supposons qu'il existe $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$. On a alors $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(\mathrm{I}_n)$ donc $\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = n$ et donc $0 = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = n$. C'est absurde.

**Exercice 13 (Triangle de Pascal).**

1) Rappeler la formule du triangle de Pascal.

2) Écrire une fonction qui prend en argument un entier $n$ et qui construit le triangle de Pascal limité à la $n^{\text{ième}}$ ligne (on considère qu'il y a une $0^{\text{ième}}$ ligne et une $0^{\text{ième}}$ colonne) sous forme matricielle. Plus précisément :
   - On commence par créer une matrice carrée d'ordre $n+1$ avec que des $0$.
   - On met des $1$ sur toute la $0^{\text{ième}}$ colonne et on ne touche plus à la $0^{\text{ième}}$ ligne.
   - Ligne par ligne on modifie quelques coefficients à l'aide de la formule du triangle de Pascal et de la ligne précédente.

   *Par exemple, pour $n = 6$, on doit obtenir :*
```
array([[ 1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  2.,  1.,  0.,  0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  3.,  3.,  1.,  0.,  0.,  0.],
       [ 1.,  4.,  6.,  4.,  1.,  0.,  0.],
       [ 1.,  5., 10., 10.,  5.,  1.,  0.],
       [ 1.,  6., 15., 20., 15.,  6.,  1.]])
```

**Correction :**

1) Pour tout entiers naturels $p$ et $n$ tels que $1 \leqslant p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

2)
```
import numpy as np
def TrianglePascal(n):
    A=np.zeros([n+1,n+1])
    A[:,0]=np.ones(n+1)
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,i+1):
            A[i,j]=A[i-1,j-1]+A[i-1,j]
    return A
```

**Exercice 14.** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calcule $P(A)$ lorsque $P = X^2 - 5X$. En déduire que $A$ est inversible et déterminer son inverse.

2) Calcule $P(B)$ lorsque $P = (X+1)(X-2)(X-5)$. En déduire que $B$ est inversible et déterminer son inverse.

**Correction :**

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$ donc

$$P(A) = A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_2.$$

On a donc $5A - A^2 = \mathrm{I}_2$ donc $A(5\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{I}_2$. Ainsi $A$ est inversible et $A^{-1} = 5\mathrm{I}_2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) On a

$$\begin{aligned} P(A) = (A+1)(A-2)(A-5) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -6 & 9 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & -3 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 36 & -36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{O}_3. \end{aligned}$$

Comme $P = (X+1)(X-2)(X-5) = X^3 - 6X^2 + 3X + 10$, on a $A^3 - 6A^2 + 3A + 10\mathrm{I}_3 = P(A) = \mathrm{O}_3$. Ainsi

$$A(-A^2 + 6A - 3\mathrm{I}_3) = -A^3 + 6A^2 - 3A = 10\mathrm{I}_3$$

et donc $A\frac{1}{10}(-A^2 + 6A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$. Nous en déduisons que $A$ est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{10}(-A^2 + 6A - 3\mathrm{I}_3).$$

On calcule que $A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 & -21 & -3 \\ -24 & 29 & -3 \\ -24 & 21 & 5 \end{pmatrix}$ donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 & -21 & -3 \\ -24 & 29 & -3 \\ -24 & 21 & 5 \end{pmatrix} + \frac{6}{10}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 3 & -15 \\ -12 & 7 & -15 \\ -12 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. En considérant $B = A - 3\mathrm{I}_3$, calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Correction :** On a $B = A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -10 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

*Puisque $A = B + 3\mathrm{I}_3$, cela suggère d'utiliser la formule du binôme de Newton et donc de calculer au préalable les puissances successives de $B$.*

On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $B^3 = \mathrm{O}_3$ et donc, pour tout $k \geqslant 3$, $B^k = \mathrm{O}_3$.

Soit $n \geqslant 2$. Puisque $B$ et $3\mathrm{I}_3$ commutent, la formule du binôme de Newton entraîne que

$$\begin{aligned}
A^n = (B+3\mathrm{I}_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (3\mathrm{I}_3)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} B^0 (3\mathrm{I}_3)^n + \binom{n}{1} B (3\mathrm{I}_3)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 (3\mathrm{I}_3)^{n-2} + \mathrm{O}_3 \\
&= 3^n \mathrm{I}_3 + n 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \\
&= 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & -10 \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3(n+1) & 3n & -6n \\ n(4-n) & 3+6n-n^2 & 2n(n-6) \\ \dfrac{n(7-n)}{2} & \dfrac{n(9-n)}{2} & -3+7n+n^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Exercice 16.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $M_\alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Correction :** C'est ultra classique. On écrit que $M_\alpha = (\alpha-1)\mathrm{I}_3 + J_3$, où $J_3$ est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $1$. On a vu en cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_3^n = 3^{n-1} J_3$ (formule fausse bien entendu pour $n=0$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $(\alpha-1)\mathrm{I}_3$ et $J_3$ commutent, la formule du binôme de Newton, entraîne que

$$M_\alpha^n = \left((\alpha-1)\mathrm{I}_3 + J_3\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J_3^k ((\alpha-1)\mathrm{I}_3)^{n-k} = (\alpha-1)^n \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J_3 (\alpha-1)^{n-k} \mathrm{I}_3.$$

On "sort" de la somme tout ce qui ne dépend pas de $k$ et on reconnait la formule du binôme de Newton (pour les réels cette fois) :

$$M_\alpha^n = (\alpha-1)^n \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (\alpha-1)^{n-k}\right) \mathrm{J}_3 = (\alpha-1)^n \mathrm{I}_3 + \frac{(3+\alpha-1)^n - (\alpha-1)^n}{3} \mathrm{J}_3.$$

**Exercice 17.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $x_n$ tel que

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de $M^n$ en fonction de $n$.

**Correction :**

1) Raisonnons par récurrence. Pour commencer on remarque que, si $x_0 = 3$, alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & 1-2x_0 & 2x_0 \\ x_0 & -x_0 & x_0+1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang $n$. On calcule alors que

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4x_n & -5+4x_n & 6-4x_n \\ 3-2x_n & 2x_n-3 & 4-2x_n \end{pmatrix}.$$

Si on pose $x_{n+1} = 3 - 2x_n$, on obtient que

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_{n+1} & 1-2x_{n+1} & 2x_{n+1} \\ x_{n+1} & -x_{n+1} & x_{n+1}+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$. Par récurrence elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) On a $x_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3 - 2x_n$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 3 - 2x$. On trouve $x = 1$. On montre ensuite que $(x_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-2$ et on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = 1 + (-2)^n(x_n - 1) = 1 - (-2)^{n+1}$$

et donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+2} & -1-(-2)^{n+2} & 2+(-2)^{n+2} \\ 1-(-2)^{n+1} & (-2)^{n+1}-1 & 2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

**Exercice 18.** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et $\mathrm{I}_3$.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $x_n$ et $y_n$ tels que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.

   b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $2$.

   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression en fonction de $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

3) Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 2X - 3$ et retrouver le résultat.

**Correction :**

1) On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \\ -4 & -4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 2A + 3\mathrm{I}_3$.

2) a) On a $A^0 = \mathrm{I}_3 = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$ avec $x_0$ et $y_0 = 1$. Ainsi la propriété est vraie au rang $0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang $n$ : il existe $x_n$ et $y_n$ des réels tels que $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.
   On a donc

$$A^{n+1} = AA^n = A(x_nA+y_n\mathrm{I}_3) = x_nA^2+y_nA = x_n(2A+3\mathrm{I}_3)+y_nA = (2x_n+y_n)A+3x_n\mathrm{I}_3 = x_{n+1}A+y_{n+1}\mathrm{I}_3,$$

   avec $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ et $y_{n+1} = 3x_n$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

   Par récurrence, on en déduit qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, .

   b) On a aussi montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n + y_n$ et $y_{n+1} = 3x_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2x_{n+1} + 3x_n.$$

   Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre $2$.

c) L'équation caractéristique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2-2r-3=0$. Elle admet deux racines réelles : $-1$ et $3$. Par conséquent, il existe $\lambda$ et $\mu$ des réels tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad x_n=\lambda(-1)^n+\mu 3^n.$$

On a $0=x_0=\lambda+\mu$ donc $\lambda=-\mu$. On a aussi $A=1\times A+0\times \mathrm{I}_3$ donc $1=x_1=-\lambda+3\mu=4\mu$ et donc $\mu=\dfrac{1}{4}$. Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad x_n=\frac{3^n-(-1)^n}{4}=\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}.$$

Enfin

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad y_n=3x_{n-1}=3\frac{3^{n-1}+(-1)^n}{4}=\frac{3^n+3(-1)^n}{4}.$$

Cette dernière formule reste vraie lorsque $n=0$ puisque $y_0=1$.

3) Le théorème de la division euclidienne entraîne qu'il existe $Q$ et $R$ dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $X^n=(X^2-2X-3)Q+R$ et $\deg(R)<\deg(X^2-2X-3)$. Ainsi il existe des réels $a$ et $b$ tels que $R=aX+b$ et donc

$$X^n=(X^2-2X-3)Q+aX+b.$$

On évalue en les racines de $X^2-2X-3$ :

- $(-1)^n=0-a+b$.
- $3^n=0+3a+b$.

En soustrayant ces deux équations, on trouve que $3^n-(-1)^n+3^n=4a$ donc $a=\dfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}$. Il s'ensuit que $b=a+(-1)^n=\dfrac{3^n+3(-1)^n}{4}$. On a donc

$$X^n=(X^2-2X-3)Q+\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}X+\frac{3^n+3(-1)^n}{4}.$$

Ainsi

$$A^n=(\underbrace{A^2-2A-3}_{=\mathrm{O}_3})Q(A)+\underbrace{\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}}_{=x_n}A+\underbrace{\frac{3^n+3(-1)^n}{4}}_{=y_n}\mathrm{I}_3.$$

**Exercice 19.** Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, notons $A_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2,\quad (A_k)_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad (i\in[\![1\,;k]\!]\text{ et }j=i+n-k)\text{ ou }(i\in[\![k+1\,;n]\!]\text{ et }j=i-k)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1) Pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, écrire la matrice $A_k$ sous forme de tableau (avec des pointillés).
2) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée $n$ et $k$ et qui construit la matrice $A_k$. Conjecturer que, pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $A_k=A_1^k$.
3) Montrer rigoureusement que, pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $A_k=A_1^k$.
4) On montrerait de même que $A_1^n=\mathrm{I}_n$. En déduire que, pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $A_k$ est inversible et préciser son inverse.

**Correction :**

1) Soit $k\in[\![1\,;n-1]\!]$. La matrice $A_k$ a des 1 sur la sur-diagonale joignant la coordonnée $(1,n-k+1)$ à la coordonnée $(k,n)$, des 1 sur la sous-diagonale joignant la coordonnée $(k+1,1)$ à la coordonnée $(n,n-k)$, et des 0 partout ailleurs.

2)
```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def matrice_A(n,k):
    A=np.zeros([n,n])
    for i in range(k):
```

```
        A[i,n-k+i]=1
    for i in range(k,n):
        A[i,i-k]=1
    return A

#Test
n=8
k=3
print(al.matrix_power(matrice_A(n,1),k))
print(matrice_A(n,k))
```

3) On raisonne par récurrence. L'initialisation est immédiatement vérifiée. Soit $k \in [\![1\,;n-2]\!]$. Supposons la propriété vraie au rang $k$.

On se donne $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. On a

$$(A_1^{k+1})_{i,j} = (A_1^k A_1)_{i,j} = (A_1 A_k A_1)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (A_1)_{i,\ell}(A_k)_{\ell,j}.$$

Pour continuer, précisons ce qu'est la matrice $A_1$ :

$$\forall (a,b) \in [\![1\,;n]\!]^2, \quad (A_1)_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (a=1 \text{ et } b=n) \text{ ou } (a \in [\![2\,;n]\!] \text{ et } b=a-1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

- Si $i=1$,

$$(A_1^{k+1})_{i,j} = 0 + \cdots + 0 + (A_1)_{i,n}(A_k)_{n,j} = (A_k)_{n,j}.$$

  Ce terme est non nul, et vaut $1$, si et seulement si $j = n-k$ si et seulement si $j = 1+n-(k+1)$.

- Si $i \geqslant 2$,

$$(A_1^{k+1})_{i,j} = 0 + \cdots + 0 + (A_1)_{i,i-1}(A_k)_{i-1,j} + 0 + \cdots + 0 = (A_k)_{i-1,j}.$$

  — Si $i \leqslant k+1$, alors $i-1 \leqslant k$ donc ce terme est non nul, et vaut $1$, si et seulement si $j = i-1+n-k$ si et seulement si $j = i-n-(k+1)$.

  — Si $i \geqslant k+2$, alors $i-1 \geqslant k+1$ donc ce terme est non nul, et vaut $1$, si et seulement si $j = i-1-k$ si et seulement si $j = i-(k+1)$.

Ainsi, dans tous les cas, $(A_1^{k+1})_{i,j} = (A_{k+1})_{i,j}$. Par conséquent la propriété est vraie au rang $k+1$. D'où le résultat par récurrence.

4) Soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. On a $\mathrm{I}_n = A_1^n = A_1^k A_1^{n-k} = A_k A_{n-k}$. On en déduit que $A_k$ est inversible et que $A_k^{-1} = A_{n-k}$.

**Exercice 20.** Considérons à nouveau la matrice $A$ de l'exercice 12. Est-ce que $A$ est inversible ? Si oui, exprimer son inverse en fonction de $A$ et $\mathrm{I}_3$. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss-Jordan.

**Correction :**

- On a montré dans l'exercice 8 que $A^2 = 2A + 3\mathrm{I}_3$. Ainsi $\frac{1}{3}(A^2 - 2A) = \mathrm{I}_3$ donc $A\left(\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$. Ainsi $A$ est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Utilisons la méthode de Gauss-Jordan :

$$(A|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -3 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + 2L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & 8 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

En faisant les opérations $L_1 \leftarrow -L_1/6$, $L_2 \leftarrow -L_2/3$ et $L_3 \leftarrow L_3/6$, on obtient que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 21.** En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Correction :**

$$(A|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 10 & 0 & -16 & 24 & -18 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + 7L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -60 & 0 & 0 & -72 & 108 & -96 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

D'où $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 4 & -6 & 7 \\ 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(B|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 12 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

Ainsi $B$ n'est pas inversible.

$$(C|\mathrm{I}_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -5 & 0 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 7L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow 7L_4 - 5L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -14 & 14 & 42 & 0 & 7 & -21 & -14 & 21 \\ 0 & 14 & 32 & 0 & 1 & -19 & -14 & 21 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & -15 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 14L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_4 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -28 & 28 & 0 & 0 & -7 & 63 & -28 & -105 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & -21 & 63 & -42 & -105 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & -15 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 7L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 8L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -84 & 0 & 0 & 0 & 21 & 63 & 0 & -105 \\ 0 & 42 & 0 & 0 & -21 & 63 & -42 & -105 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 3 & -15 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -7 & -21 & -14 & 21 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

D'où $C$ est inversible et $C^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & -4 & -10 \\ 1 & -5 & 0 & 7 \\ -2 & -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

**Exercice 22.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels $\lambda$ tels que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.

**Correction :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$A - \lambda \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 6 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$
Le réel $2-\lambda$ pouvant être nul, nous allons intervertir les deux premières lignes. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 3 & -4-\lambda & 6 \\ 2-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & (4+\lambda)(2-\lambda) & 6\lambda \\ 0 & -2+\lambda & 3(3-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - (2-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$$

- Supposons que $\lambda = 2$. On obtient alors
$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
La matrice $A$ n'est pas inversible (puisqu'on s'est ramené, à l'aide d'opérations élémentaires, à une matrice triangulaire dont l'un des coefficients sur la diagonale est nul).
- Supposons que $\lambda \neq 2$ afin que $\lambda - 2 \neq 0$. Le réel $4+\lambda$ pouvant être nul, nous allons intervertir les deux dernières lignes. On obtient :
$$\begin{pmatrix} 3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & -2+\lambda & 3(3-\lambda) \\ 0 & (4+\lambda)(2-\lambda) & 6\lambda \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -4-\lambda & 6 \\ 0 & -2+\lambda & 3(3-\lambda) \\ 0 & 0 & 6\lambda + 3(4+\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + (4+\lambda)L_2 .$$
On a $6 + 3(4+\lambda)(3-\lambda) = 3(\lambda + 12 - \lambda^2) = 3(4-\lambda)(3+\lambda)$.
  — Si $\lambda = 4$, alors on obtient
$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc $A$ n'est pas inversible.
  — Si $\lambda = -3$, alors on obtient
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et donc $A$ n'est pas inversible.
  — Si $\lambda \notin \{-3; 4\}$, alors $6\lambda + 3(4+\lambda)(3-\lambda) \neq 0$ et donc $A$ est inversible.

On en déduit que $A - \lambda \mathrm{I}_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{2; -3; 4\}$.

**Exercice 23.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$
On introduit aussi les matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**Correction :**

1) La matrice $P$ est inversible car son déterminant est $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{-1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. De plus

$$P^{-1}=\frac{1}{1/3}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

On calcule alors que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 10 & -5\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}.$$

2) On a $A=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n=PD^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & (-5)^n\end{pmatrix}P^{-1}.$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix}$. On a alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad X_{n+1}=AX_n.$$

Une récurrence immédiate montrer que

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\qquad X_n=A^nX_0&=P\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & (-5)^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}\\ &=P\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & (-5)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}\\ &=P\begin{pmatrix}-(-2)^n\\ -4(-5)^n\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4(-5)^n-(-2)^n\\ (-2)^{n+1}-4(-5)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{4(-5)^n-(-2)^n}{3}$ et $v_n=\frac{(-2)^{n+1}-4(-5)^n}{3}$.

**Exercice 24.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=-1$, $u_1=1$, $u_2=2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+3}=3u_{n+2}+u_{n+1}-3u_n.$$

Posons $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix}$.

1) Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1}=AX_n$.
2) Déterminer $U$, $V$ et $W$ non nuls dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $AU=U$, $AV=-V$ et $AW=3W$.
3) Considérons $P$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes $U$, $V$ et $W$ (dans cet ordre). Montrer que $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ puis calculer $P^{-1}$ et $D=P^{-1}AP$.
4) Exprimer $X_n$ en fonction de $X_0$, $P^{-1}$, $P$ et $D^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
5) En déduire $u_n$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
6) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée $n$ et qui revoie $u_n$ à l'aide de produits matriciels.

**Correction :**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -3u_n + u_{n+1} + 3u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

2) • On cherche $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $AU = U$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = x \\ z = y \\ -3x + y + 3z = z \end{cases}$$

On remarque que $x = y = z = 1$ conviennent.

• On cherche $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $AV = -V$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = -x \\ z = -y \\ -3x + y + 3z = -z \end{cases}$$

On remarque que $x = z = 1$ et $y = -1$ conviennent.

• On cherche $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que $AW = 3W$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = 3x \\ z = 3y \\ -3x + y + 3z = 3z \end{cases}$$

On remarque que $x = 1$, $y = 3$, $z = 9$ conviennent.

On considère donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3) Posons donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Utilisons la méthode de Gauss-Jordan :

$$(P|\mathrm{I}_3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 8 & 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

Ainsi $P$ est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule que

$$P^{-1}AP = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D.$$

*Autre méthode moins calculatoire :*

$$AP = A(U|V|W) = (AU|AV|AW) = (U|-V|3W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}(U|V|W) = PD$$

*donc* $P^{-1}AP = P^{-1}PD = D.$

4) Par récurrence immédiate, on a $X_n = A^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$P^{-1}X_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

puis

$$D^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 \\ -5(-1)^n \\ 3\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

et enfin

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 \\ -5(-1)^n \\ 3\cdot 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6-5(-1)^n+3\cdot 3^n \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

*Inutile de calculer les deux dernières lignes, c'est $u_n$ que l'on veut et non $u_{n+1}$ ni $u_{n+2}$.* Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{-6-5(-1)^n+3^{n+1}}{8}.$$

6)

```
def suite_u(n):
    X=np.transpose([[-1,1,2]])
    A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[-3,1,3]])
    U=np.dot(al.matrix_power(A,n),X)
    return U[0,0]
```

**Exercice 25.** Considérons $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de $M$.

2) Est-ce que $M$ est inversible ?

3) Calculer $M^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

**Correction :**

1) On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $2M^2 - M = \begin{pmatrix} -6 & -16 & -20 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 12 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -14 & -13 \\ -1 & -4 & -4 \\ 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ et

$$M^3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -14 & -13 \\ -1 & -4 & -4 \\ 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

On a donc $M^3 = 2M^2 - M$ donc $P(M) = \mathrm{O}_3$.

2) Si $M$ est inversible, alors $\mathrm{O}_3 = M^{-1}P(M) = M^2 - 2M + \mathrm{I}_3$. On vérifie que ce n'est pas le cas. Ainsi, par l'absurde, $M$ n'est pas inversible.

*On pouvait bien sûr utiliser la méthode du pivot de Gauss.*

3) On a $M^3 = 2M^2 - M$ puis

$$M^4 = MM^3 = M(2M^2 - M) = 2M^3 - M^2 = 2(2M^2 - M) - M^2 = 3M^2 - 2M,$$

$$M^5 = MM^4 = M(3M^2 - 2M) = 3M^3 - 2M^2 = 3(2M^2 - M) - 2M^2 = 4M^2 - 3M,$$

$$M^6 = MM^5 = M(4M^2 - 3M) = 4M^3 - 3M^2 = 4(2M^2 - M) - 3M^2 = 5M^2 - 4M,$$

etc. On a aussi $M^2 = 1M^2 - 0M$ et $M = 0M^2 - (-1)M$. On conjecture que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad M^n = (n-1)M^2 - (n-2)M.$$

Montrons cette formule par récurrence. On a vu qu'elle est vraie au rang $1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'elle est vrai au rang $n$. On a

$$\begin{aligned} M^{n+1} = MM^n = M((n-1)M^2 - (n-2)M) &= (n-1)M^3 - (n-2)M^2 \\ &= (n-1)(2M^2 - M) - (n-2)M^2 = nM^2 - (n-1)M. \end{aligned}$$

Elle est donc vraie au rang $n+1$. Ainsi par récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 26.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, posons

$$M_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \quad D_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)E_{i,i} \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j}.$$

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) En quoi consiste le produit $M_{i,j}A$ ? En déduire que $M_{i,j}$ est inversible et calculer $M_{i,j}^{-1}$.

2) En quoi consiste le produit $D_i(\alpha)A$ ? En déduire que $D_i(\alpha)$ est inversible et calculer $D_i(\alpha)^{-1}$.

3) En quoi consiste le produit $T_{i,j}(\alpha)A$ ? En déduire que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et calculer $T_{i,j}(\alpha)^{-1}$.

**Correction :** Avant de commencer, demandons-nous à quoi est égale la matrice $E_{i,j}A$ lorsque $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a

$$(E_{i,j}A)_{k,\ell} = \sum_{x=1}^{n} (E_{i,j})_{k,x} a_{x,\ell} = (E_{i,j})_{k,j} a_{j,\ell} = \left\{ \begin{array}{ll} a_{j,\ell} & \text{si} \quad k = i \\ 0 & \text{si} \quad k \neq i \end{array} \right. .$$

Ainsi $E_{i,j}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est la $j^{\text{ème}}$ ligne de $A$, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1) Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. La matrice $E_{i,i}A$ (resp. $E_{j,j}A$) est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne est la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne de $A$, et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi la matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j})A$ est la matrice $A$ dont on a transformé tous les coefficients des lignes $i$ et $j$ en $0$. Nous en déduisons que $M_{i,j}A$ est la matrice $A$ dont les lignes $i$ et $j$ ont été échangées.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $M_{i,j}$ est inversible d'inverse $M_{i,j}$.

2) Soit $(i,\alpha) \in [\![1\,;n]\!] \times \mathbb{R}$. La matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i})A$ est la matrice $A$ dont on a transformé tous les coefficients de la ligne $i$ en $0$. La matrice $\alpha E_{i,i}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est la $i^{\text{ième}}$ ligne de $A$ multipliée par $\alpha$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi $D_i(\alpha)A$ est la matrice $A$ dont les coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne ont été multipliés par $\alpha$.

   Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \dfrac{1}{\alpha}L_i$ à nouveau. Nous en déduisons que $D_i(\alpha)$ est inversible d'inverse $D_i(1/\alpha)$.
   Si $\alpha = 0$, alors $D_i(0)$ n'est pas inversible (il s'agit d'une matrice diagonale dont un coefficient est nul).

3) Soit $(i,j,\alpha) \in [\![1\,;n]\!]^2 \times \mathbb{R}$. La matrice $T_{i,j}(\alpha)A$ est la matrice $A$ dont on a ajouté $\alpha$ fois la $j^{\text{ième}}$ ligne à la $i^{\text{ième}}$ ligne.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \alpha L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\alpha)$.

**Exercice 27 (Pivot de Gauss).**

1) a) Compléter la fonction suivante pour qu'elle prenne en argument une matrice et lui applique la méthode du pivot de Gauss pour la mettre sous forme triangulaire :

```
def PivotGauss(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    for j in range(min(n-1,p)):
        #On recherche le premier pivot non nul pour la colonne j :
        pivot=0
        i0=j-1
        while (pivot==0) and (i0<n-1):
                i0=i0+1
                pivot=A[i0,j]
        #Ce premier pivot non nul (s'il existe) est en position i0.
        if pivot!=0:
            #On échange les lignes i0 et j :
            L=A[i0,:].copy()
            ..................
            ..................
            #On annule les coefficients de la colonne j
            #dans les lignes suivant la ligne j :
        for k in range(j+1,n):
            c=A[k,j]
            ................................
    return A
```

   b) Modifier cette fonction pour qu'elle prenne aussi en argument un vecteur colonne $B$ ayant le même nombre de lignes que $A$ et fasse les mêmes opérations sur $B$ que sur $A$.

2) Écrire une fonction qui prend en argument une matrice triangulaire supérieure et qui renvoie `True` si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle renvoie `False` sinon.

3) Écrire une fonction qui prend en argument une matrice carrée $A$ et un vecteur colonne $B$ qui vérifie si $A$ est inversible et qui, dans ce cas, renvoie l'unique solution du système $AX = B$ (en utilisant les questions précédentes et la méthode du pivot de Gauss pour « remonter »).

4) a) Résoudre avec les commandes Python prédéfinies le système $AX = B$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Recommencer avec la fonction de la question 3.

**Correction :**

1) a)

```
def PivotGauss(A):
    [n,p]=np.shape(A)
    for j in range(min(n-1,p)):
        #On recherche le premier pivot non nul pour la colonne j :
        pivot=0
        i0=j-1
        while (pivot==0) and (i0<n-1):
                i0=i0+1
                pivot=A[i0,j]
        #Ce premier pivot non nul (s'il existe) est en position i0.
        if pivot!=0:
           #On échange les lignes i0 et j :
           L=A[i0,:].copy()
           A[i0,:]=A[j,:]
           A[j,:]=L
           #On annule les coefficients de la colonne j
           #dans les lignes suivant la ligne j :
        for k in range(j+1,n):
            c=A[k,j]
            A[k,:]=pivot*A[k,:]-c*A[j,:]
    return A
```

b)

```
def PivotGauss2(A,B):
    [n,p]=np.shape(A)
    for j in range(min(n-1,p)):
        #On recherche le premier pivot non nul pour la colonne j :
        pivot=0
        i0=j-1
        while (pivot==0) and (i0<n-1):
                i0=i0+1
                pivot=A[i0,j]
        #Ce premier pivot non nul (s'il existe) est en position i0.
        if pivot!=0:
           #On échange les lignes i0 et j :
           L=A[i0,:].copy(); M=B[i0].copy()
           A[i0,:]=A[j,:]; B[i0]=B[j];
           A[j,:]=L; B[j]=M
           #On annule les coefficients de la colonne j
           #dans les lignes suivant la ligne j :
        for k in range(j+1,n):
            c=A[k,j]
            A[k,:]=pivot*A[k,:]-c*A[j,:]
            B[k]=pivot*B[k]-c*B[j]
    return A,B
```

2)

```
def VerifInv(A):
    n=np.shape(A)[0]
    x=np.prod([A[i,i] for i in range(n)])
    if x!=0:
        return True
    else:
        return False
```

3)

```
def ResolvSys(A,B):
    A,B=PivotGauss2(A,B)
    if not VerifInv(A):
        print('Pas inversible')
    else:
        n=np.shape(A)[0]
        for i in range(n-1):
            j=n-1-i
            for k in range(j):
                c=A[k,j]
                A[k,:]=A[j,j]*A[k,:]-c*A[j,:]
                B[k]=A[j,j]*B[k]-c*B[j]
        for i in range(n):
            B[i]=B[i]/A[i,i]
        return B
```

4) a)

```
A=np.array([[-4., 1., 3., 0.],[-1., -1., -1., -1.],[ 1., 0., 3., 1.],[ 0., -1., -1., -1.]])
B=np.array([[3.],[2.],[6.],[3.]])
al.solve(A,B)
```

On trouve `array([[ 1.],[-2.],[ 3.],[-4.]])`.

b)

```
ResolvSys(A,B)
```

On trouve `array([[ 1.],[-2.],[ 3.],[-4.]])`.