Correction de quelques exercices de la feuille de TD 18

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires réels suivants :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

Correction :

1) Pour simplifier les calculs, on peut déjà commencer par multiplier chaque ligne par 6. On obtient

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 \\ 2x + 10y + 9z = 14 \\ 2x - 8y - 11z = -3 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ -27y - 30z = -24 & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & \\ 0 = 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

La ligne L_3 est fausse donc il n'y a pas de solution au système.

2) Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}(S) &\iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3y - 4z = -7 & \\ -2x - y = 3 & \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -5y + 4z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -8z = 34 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 20x = 50 & L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ 6y = -48 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ -8z = 34 & \end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x & & & = & \frac{5}{2} & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{20} \\ & y & & = & -8 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{6} \\ & & z & = & -\frac{17}{4} & L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{8} \end{cases}$$

Ainsi le système admet $\left(\frac{5}{2}, -8, -\frac{17}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(-10, 32, 17\right)$ pour unique solution.

3) Traitée en cours.

4) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \quad \iff \quad \begin{cases} x & - & 2y & + & 4z & & & = & \\ & & 5y & - & 13z & - & 2t & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & - & 10y & + & 26z & + & 4t & = & 6 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \\ & & & & & & 0 & = & -3 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

La dernière ligne étant fausse, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions.

5) Commençons par multiplier la première ligne par 15 et la deuxième par 12 pour qu'il n'y ait plus de fractions :

$$(S) \quad \iff \quad \begin{cases} 3x & + & 15y & - & 15z & = & 5 \\ 3x & - & 6y & - & 4z & = & -6 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 3x & + & 15y & - & 15z & = & 5 \\ 3x & - & 6y & - & 4z & = & -6 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} 3x & + & 15y & - & 15z & = & 5 \\ & - & 21y & + & 11z & = & -11 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} 3x & - & 15z & = & 5 & - & 15y \\ & & 11z & = & -11 & + & 21y \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} 33x & & & = & -110 & + & 150y & L_1 \leftarrow 11L_1 + 15L_2 \\ & & 11z & = & -11 & + & 21y \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} x & & & = & -\frac{10}{3} & + & \frac{50}{11}y & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{33} \\ & & z & = & -1 & + & \frac{21}{11}y & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{11} \end{cases}$$

$$\iff \quad (x, y, z) = \left(-\frac{10}{3} + \frac{50}{11}y, y, -1 + \frac{21}{11}y\right)$$

$$\iff \quad (x, y, z) = \left(-\frac{10}{3}, 0, -1\right) + y\left(\frac{50}{11}, 1, \frac{21}{11}\right)$$

$$\iff \quad (x, y, z) = -\frac{1}{3}\left(10, 0, 3\right) + \frac{y}{11}\left(50, 11, 21\right)$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ -\frac{1}{3}\left(10, 0, 3\right) + \frac{y}{11}\left(50, 11, 21\right) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$.

6) Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 2x & + & 6y & + & z & - & 3t & + & 7u & = & -3 \\ 3x & + & 5y & + & z & & & - & 2u & = & 2 \\ 2x & + & 8y & + & 5z & + & 6t & - & 7u & = & 5 \\ -4x & - & 2y & + & 3z & + & 6t & - & 3u & = & 1 \\ -5x & - & y & + & 3z & + & 3t & + & 6u & = & -4 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} 2x & + & 6y & + & z & - & 3t & + & 7u & = & -3 \\ & - & 8y & - & z & + & 9t & - & 25u & = & 13 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ & & 2y & + & 4z & + & 9t & - & 14u & = & 8 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & & 10y & + & 5z & & & + & 11u & = & -5 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ & & 28y & + & 11z & - & 9t & + & 47u & = & -23 & L_5 \leftarrow 2L_5 + 5L_1 \end{cases}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}2x & + & 6y & + & z & - & 3t & + & 7u & = & -3 & \\ & - & 8y & - & z & + & 9t & - & 25u & = & 13 & \\ & & & & 15z & + & 45t & - & 81u & = & 45 & \quad L_3 \leftarrow 4L_3+L_2 \\ & & & & 15z & + & 45t & - & 81u & = & 45 & \quad L_4 \leftarrow 4L_4+5L_2 \\ & & & & 15z & + & 45t & - & 81u & = & 45 & \quad L_5 \leftarrow 2L_5+7L_2\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}2x & + & 6y & + & z & - & 3t & + & 7u & = & -3 & \\ & - & 8y & - & z & + & 9t & - & 25u & = & 13 & \\ & & & & 15z & + & 45t & - & 81u & = & 45 & \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 & \quad L_4 \leftarrow L_4-L_3 \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 & \quad L_5 \leftarrow L_5-L_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}2x & + & 6y & + & z & - & 3t & + & 7u & = & -3 \\ & - & 8y & - & z & + & 9t & - & 25u & = & 13 \\ & & & & 15z & + & 45t & - & 81u & = & 45\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr}2x & + & 6y & + & z & = & -3 & + & 3t & - & 7u \\ & - & 8y & - & z & = & 13 & - & 9t & + & 25u \\ & & & & 15z & = & 45 & - & 45t & + & 81u\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}30x & + & 90y & & & = & -90 & + & 90t & - & 186u & \quad L_1 \leftarrow 15L_1-L_3 \\ & - & 120y & & & = & 240 & - & 180t & + & 456u & \quad L_2 \leftarrow 15L_2+L_3 \\ & & & & 15z & = & 45 & - & 45t & + & 81u &\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl}120x & & & & & = & 360 & - & 180t & + & 624u & \quad L_1 \leftarrow 4L_1+3L_2 \\ & - & 120y & & & = & 240 & - & 180t & + & 456u & \\ & & & & 15z & = & 45 & - & 45t & + & 81u &\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrcrcrl}x & & & = & 3 & - & \frac{3}{2}t & + & \frac{26}{5}u & \quad L_1 \leftarrow \frac{L_1}{120} \\ & y & & = & -2 & + & \frac{3}{2}t & - & \frac{19}{5}u & \quad L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{120} \\ & & z & = & 3 & - & 3t & + & \frac{27}{5}u & \quad L_3 \leftarrow \frac{L_3}{15}\end{array}\right.$$

$$\iff \quad (x,y,z,t,u) = \left(3-\frac{3}{2}t+\frac{26}{5}u, -2+\frac{3}{2}t-\frac{19}{5}u, 3-3t+\frac{27}{5}u, t, u\right)$$

$$\iff \quad (x,y,z,t,u) = (3,-2,3,0,0) + t\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3, 1, 0\right) + u\left(\frac{26}{5}, -\frac{19}{5}, \frac{27}{5}, 0, 1\right)$$

$$\iff \quad (x,y,z,t,u) = (3,-2,3,0,0) + \frac{t}{2}(-3,3,-6,2,0) + \frac{u}{5}(26,-19,27,0,5)$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ (3,-2,3,0,0) + \frac{t}{2}(-3,3,-6,2,0) + \frac{u}{5}(26,-19,27,0,5) \;\middle|\; (t,u) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2.

1) On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynôme existe-il ? Est-il unique ?
2) Même question avec $P \in \mathbb{R}_4[X]$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0\,;4]\!]$, $P(k) = k$

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Si $P \in \mathbb{R}_4[X]$, alors il existe $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. Nous avons $P(k) = k$ pour tout $k \in [\![0\,;4]\!]$ si et seulement si $e = P(0) = 0$ et (a,b,c,d) est solution du système

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}a & + & b & + & c & + & d & = & 1 \\ 16a & + & 8b & + & 4c & + & 2d & = & 2 \\ 81a & + & 27b & + & 9c & + & 3d & = & 3 \\ 256a & + & 64b & + & 16c & + & 4d & = & 4\end{array}\right.$$

On peut diviser la ligne k par k pour tout $k \in [\![1,4]\!]$ et on obtient alors

$$(S) \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{cases}$$

Utilisons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 1 \\ 64a + 16b + 4c + d = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 & \\ - 4b - 6c - 7d = -7 & L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ - 18b - 24c - 26d = -26 & L_3 \leftarrow L_3 - 27L_1 \\ - 48b - 60c - 63d = -63 & L_4 \leftarrow L_4 - 64L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 & \\ - 4b - 6c - 7d = -7 & \\ 6c + 11d = 11 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 9L_2 \\ 12c + 21d = 21 & L_4 \leftarrow L_4 - 12L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c + d = 1 & \\ - 4b - 6c - 7d = -7 & \\ 6c + 11d = 11 & \\ - d = -1 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ - 4b - 6c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 7L_4 \\ 6c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 11L_4 \\ - d = -1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6a + 6b = 0 & L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ - 4b = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 6c = 0 & \\ - d = -1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 12a = 0 & L_1 \leftarrow 2L_1 + 3L_2 \\ - 4b = 0 & \\ 6c = 0 & \\ - d = -1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{12} \\ b = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{4} \\ c = 0 & L_3 \leftarrow \frac{L_3}{6} \\ d = 1 & L_4 \leftarrow -L_4 \end{cases}$$

Ainsi X est le seul polynôme vérifiant la condition.

Il aurait été bien plus rapide de remarquer que P coïncide avec X en cinq valeurs distinctes. Comme P et X sont dans $\mathbb{R}_4[X]$, on en déduit que $P = X$.

Exercice 4 (Un peu de chimie). Équilibrer l'équation chimique

$$C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$$

Il faut placer un entier naturel (le plus petit possible) non nul devant chaque molécule de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation. L'équation ci-dessus traduit le fait que la combustion de l'éthane (éthane + dioxygène) produit du dioxyde de carbone et de l'eau.

Correction : On cherche a, b, c, d entiers tels que $aC_2H_6 + bO_2 \to cCO_2 + dH_2O$. Ils doivent vérifier :

- $2a = c$ (en regardant les molécules de carbone).
- $6a = 2d$ (en regardant les molécules d'hydrogène) ou encore $3a = d$
- $2b = 2c + d$ (en regardant les molécules d'oxygène).

Il s'agit donc de résoudre le système :

$$
\begin{cases} 2a & & - & c & & & = & 0 \\ 3a & & & & - & d & = & 0 \\ & 2b & - & 2c & - & d & = & 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} 2a & & - & c & & & = & 0 \\ & & & 3c & - & 2d & = & 0 \\ & 2b & - & 2c & - & d & = & 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1
$$

$$
\iff \begin{cases} 2a & & - & c & & & = & 0 \\ & 2b & - & 2c & - & d & = & 0 \\ & & & 3c & - & 2d & = & 0 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3
$$

$$
\iff \begin{cases} 2a & & - & c & & & = & 0 \\ & 2b & - & 2c & - & d & = & 0 \\ & & & 3c & - & 2d & = & 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} a & = & \frac{c}{2} = \frac{d}{3} \\ b & = & c + \frac{d}{2} = \frac{2d}{3} + \frac{d}{2} = \frac{7d}{6} \\ c & = & \frac{2d}{3} \end{cases}
$$

Comme a, b, c, d, sont des entiers naturels non nuls, d doit être un multiple de 3, i.e. sous la forme $3k$. On a donc $a = k$, $b = 7k/2$ et $c = 2k$. Forcément k est pair (puisque $7k = 2b$) et le plus petit possible donc $k = 2$ et donc $a = 2$, $b = 7$, $c = 4$ et $d = 6$. L'équation équilibrée est donc :

$$
2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O.
$$

Exercice 5. Soient $\lambda, \rho, \alpha, \beta$ des réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

1) $\begin{cases} z & = & \lambda x \\ y & = & \lambda y \\ x & = & \lambda z \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x & & & - & z & = & \lambda x \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & \lambda y \\ -x & & & + & 3z & = & \lambda z \end{cases}$

3) $\begin{cases} \rho x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & + & \rho y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \rho z & = & 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \alpha x & + & \beta y & + & z & = & 1 \\ x & + & \alpha\beta y & + & z & = & \beta \\ x & + & \beta y & + & \alpha z & = & 1 \end{cases}$

Correction :

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ x & & & - & \lambda z & = & 0 \end{cases}
$$

- Premier cas : $\lambda = 0$. On a alors

$$
(S) \iff \begin{cases} & & z & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ x & & & = & 0 \end{cases}
$$

Ainsi $(0, 0, 0)$ est l'unique solution.

- Deuxième cas : $\lambda \neq 0$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ & & & (1-\lambda^2)z & = & 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow \lambda L_3 + L_1$$

— Si $\lambda = 1$, alors

$$(S) \iff -x + z = 0 \iff x = z.$$

L'ensemble des solutions est $\{(x, y, x) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

— Si $\lambda = -1$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ & 2y & & & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(x, 0, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

— Si $\lambda \notin \{-1, 1\}$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Ainsi $(0, 0, 0)$ est l'unique solution.

2) Traitée en cours.

3) Soit $\rho \in \mathbb{R}$. On a

$$(S) \iff \begin{cases} x & + & y & + & \rho z & = & 1 \\ x & + & \rho y & + & z & = & 0 \\ \rho x & + & y & + & z & = & -1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

On a inversé les lignes 1 et 3 puisque ρ peut être nul (mais sinon il faut faire deux cas).

$$(S) \iff \begin{cases} x & + & y & + & \rho z & = & 1 \\ & & (\rho-1)y & + & (1-\rho)z & = & -1 \\ & & (1-\rho)y & + & (1-\rho^2)z & = & -1-\rho \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \rho L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & + & \rho z & = & 1 \\ & & (\rho-1)y & + & (1-\rho)z & = & -1 \\ & & & & (2-\rho^2-\rho)z & = & -2-\rho \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

On aurait dû faire deux cas puisque le pivot $\rho - 1$ peut être nul. Mais ici c'est inutile puisqu'on peut tout simplement additionner les lignes 2 et 3 pour annuler le coefficient devant le y dans la troisième ligne.

On a $2 - \rho^2 - \rho = (2 + \rho)(1 - \rho)$.

- Premier cas : $\rho = 1$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -1 \\ & & & & 0 & = & -3 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solutions.

- Deuxième cas : $\rho = -2$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ & - & 3y & + & 3z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & = & 1 + 2z \\ & & y & = & 1/3 + z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 2/3 + z \\ y & = & 1/3 + z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(2/3, 1/3, 0) + z(1, 1, 1) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$.

- Troisième cas : $\rho \notin \{1,-2\}$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + \rho z = 1 \\ (\rho-1)y + (1-\rho)z = -1 \\ z = \dfrac{1}{\rho-1} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - \dfrac{\rho}{\rho-1} \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1}{\rho-1} \end{cases}$$

Ainsi $\left(\dfrac{1}{1-rho}, 0, \dfrac{1}{\rho-1}\right)$ est l'unique solution.

4) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ \alpha x + \beta y + z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \beta(1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z = 1-\alpha & L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 \\ (1-\alpha)(2+\alpha)z = \beta - \alpha & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

- Premier cas : $\alpha = 1$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + z = 1 \\ 0 = \beta - 1 \\ 0 = \beta - 1 \end{cases}$$

Si $\beta \neq 1$, il n'y a pas de solution. Si $\beta = 1$, alors

$$(S) \iff x = 1 - y - z.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Deuxième cas : $\alpha = -2$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y - 2z = 1 \\ -3\beta y + 3z = \beta - 1 \\ 0 = \beta + 2 \end{cases}$$

Si $\beta \neq -2$, alors il n'y a pas de solutions. Si $\beta = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 1 + 2z \\ 2y = -1 - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 + z \\ 2y = -1 - z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(2+z, -(1+z)/2, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$.

- Troisième cas : $\alpha \notin \{1, -2\}$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y = 1 - \dfrac{\alpha(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ \beta(\alpha-1)y = \beta - 1 - \dfrac{\beta-\alpha}{2+\alpha} \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Supposons que $\beta = 0$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x = 1 + \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ 0 = -1 + \dfrac{\alpha}{2+\alpha} \\ z = -\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ 0 = -2-\alpha \\ z = -\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Il n'y a pas de solutions puisque la deuxième ligne est fausse (en effet on a supposé que $\alpha \neq -2$).

Si $\beta \neq 0$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y = \dfrac{2-\alpha-\alpha\beta}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ y = \dfrac{\beta - 2 + \beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)} \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ y = \dfrac{\beta - 2 + \beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)} \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Il y a donc une unique solution : $\left(\dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)}, \dfrac{\beta-2+\beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)}, \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)}\right)$.