Correction des exercices de la feuille de TD 17

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1) $P = (X-1)^n - (X+7)^n$,
2) $P = (X+2)^n + (1-X)^n$,
3) $P = \prod_{k=2}^{n+1} (X^k + X + 1)$,
4) $P = \prod_{m=1}^{n} (3X^2 + 2mX + 2024)$,
5) $P = \prod_{\ell=1}^{n} (64X^6 + 2023X^4 + \ell)^{\ell^2}$.

Correction :

1) P est l'addition de deux polynômes de degré n dont les coefficients dominants sont opposés l'un de l'autre. Il appartient donc à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ mais on ne peut pas conclure directement quant à son degré simplement avec les formules du cours sur le degré.

   La formule du binôme de Newton entraîne que
$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 7^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \big((-1)^{n-k} - 7^{n-k}\big).$$
   - Si $k = n$, alors $(-1)^{n-k} - 7^{n-k} = 0$.
   - Si $k = n-1$, alors $(-1)^{n-k} - 7^{n-k} = -1 - 7 = -8$.

   Ainsi P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $-8\binom{n}{n-1} = -8n$.

2) P est l'addition de deux polynômes de degré n dont les coefficients dominants sont opposés l'un de l'autre lorsque n est impair. Il appartient donc à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ mais on ne peut pas conclure directement quant à son degré simplement avec les formules du cours sur le degré. Si n est pair, alors P est de degré n et de coefficient dominant 2.

   Supposons que n est impair. La formule du binôme de Newton entraîne que
$$P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \big(2^{n-k} + (-1)^k\big).$$
   - Si $k = n$, alors $2^{n-k} + (-1)^k = 1 - 1 = 0$ car n est impair.
   - Si $k = n-1$, alors $2^{n-k} + (-1)^k = 2 + 1 = 3$.

   Ainsi P est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $3n$.

3) On a
$$\deg(P) = \sum_{k=2}^{n+1} \deg(X^k + X + 1) = \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$
   et son coefficient dominant est $\prod_{k=2}^{n+1} 1 = 1$.

4) On a
$$\deg(P) = \sum_{m=1}^{n} \deg(3X^2 + 2mX + 2022) = \sum_{m=1}^{n} 2 = 2n$$
   et son coefficient dominant est $\prod_{m=1}^{n} 3 = 3^n$.

5) On a

$$\deg(P) = \sum_{\ell=1}^{n} \deg((64X^6 + 2021X^4 + \ell)^{\ell^2}) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 \deg(64X^6 + 2021X^4 + \ell) = \sum_{\ell=1}^{n} 6\ell^2 = n(n+1)(2n+1).$$

et son coefficient dominant est $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} 64^{\ell^2} = 64^{n(n+1)(2n+1)/6} = 2^{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 2. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer, en n'utilisant que la définition formelle de la dérivée d'un polynôme que,

1) $(P+Q)' = P' + Q'$, 2) $(\lambda P)' = \lambda P'$, 3) $(PQ)' = P'Q + QP'$, 4) $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Pour le dernier point, on pourra commencer par étudier la dérivée du polynôme Q^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ non constants (sinon c'est immédiat). Si $p < q$, on pose $a_{p+1} = \cdots = a_q = 0$ et, si $p > q$, on pose $b_{q+1} = \cdots = b_p = 0$.

- On a

$$(P+Q)' = \left(\sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p} k(a_k + b_k) X^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{p} k b_k X^{k-1} = P' + Q'.$$

- On a

$$(\lambda P)' = \left(\sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p} k \lambda a_k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1} = \lambda P'.$$

- Pour tout $k \in [\![0, p+q]\!]$, posons $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$. On a

$$(PQ)' = \left(\sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k\right)' = \sum_{k=1}^{p+q} k c_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} (k+1) c_{k+1} X^k.$$

  On a aussi

$$P'Q = \sum_{k=0}^{p-1+q} \widetilde{c}_{k+1} X^k \qquad \text{avec, pour tout } k \in [\![0, p+q-1]\!], \qquad \widetilde{c}_k = \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j}$$

  et

$$PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} \widehat{c}_{k+1} X^k \qquad \text{avec, pour tout } k \in [\![0, p+q-1]\!], \qquad \widehat{c}_k = \sum_{j=0}^{k} a_j (k-j+1) b_{k-j+1}.$$

  Par conséquent

$$P'Q + PQ' = \sum_{k=0}^{p+q-1} (\widetilde{c}_{k+1} + \widehat{c}_{k+1}) X^k = (PQ)'$$

  puisque, pour tout $k \in [\![0, p+q-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\widehat{c}_{k+1} + \widehat{c}_{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} (j+1) a_{j+1} b_{k-j} + \sum_{j=0}^{k} a_j (k-j+1) b_{k-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} j a_j b_{k-j+1} + \sum_{j=0}^{k} (k-j+1) a_j b_{k-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{k} (j+k-j+1) a_j b_{k-j+1} + (k+1) a_{k+1} b_0 + (k+1) a_0 b_{k+1} = (k+1) c_{k+1}.
\end{aligned}$$

- Montrons par récurrence que $(Q^n)' = nQ'Q^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il n'y a rien à faire si $n = 1$. Supposons que cette propriété soit vrai au rang n pour un certain n fixé. On a alors
$$(Q^{n+1})' = (QQ^n)' = Q'Q^n + (Q^n)'Q = Q'Q^n + nQ'Q^{n-1}Q = (n+1)Q'Q^n.$$
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. D'où le résultat par récurrence.

  Ensuite, on a
$$(P \circ Q)' = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k\right)' = \sum_{k=0}^{p} a_k (Q^k)' = \sum_{k=0}^{p} a_k k Q' Q^{k-1} = Q' \sum_{k=0}^{p} k a_k Q^{k-1} = Q' \times P \circ Q'.$$

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $Q = X^2P' - nXP \in \mathbb{R}_n[X]$.

Correction : Notons λ le coefficient dominant de P.
- X^2P' est de degré $n+1$ est de coefficient dominant $n\lambda$.
- $-nXP$ est de degré $n+1$ est de coefficient dominant $-n\lambda$.

Ainsi $\deg(Q) < \max(\deg(X^2P'), \deg(-nXP)) = n+1$. Ainsi $\deg(Q) \leqslant n$. On a bien $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Correction : Déjà le polynôme nul convient. Soit P polynôme non nul tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Notons d le degré de P. On a alors
$$2d = \deg(P(X^2)) = \deg((X^+1)P(X)) = 2 + d$$
donc $d = 2$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. Ainsi
$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c.$$
Par unicité des coefficient d'un polynôme, on a $b = 0$ et $c+a = b$ donc $b = 0$ et $c = -a$. Finalement $P = a(X^2-1)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2-1)$ (*prendre $a = 0$, permet d'inclure le polynôme nul, traité à part jusqu'à présent.*). On a alors
$$P(X^2) = a(X^4-1) \qquad \text{et} \qquad (X^2+1)P(X) = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^4-1).$$
Ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes de la forme $a(X^2-1)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.
On pourra s'intéresser au coefficient dominant.

Correction : Déjà le polynôme nul convient. Soit P polynôme non nul tel que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$. Notons d son degré et a son coefficient dominant.
- $X(X+1)P''$ est de degré d et de coefficient dominant $d(d-1)a$.
- $(X+2)P'$ est de degré d et de coefficient dominant da.
- $-P'$ est de degré d et de coefficient dominant $-a$.

On en déduit que $d(d-1)a + da - a = 0$. Autrement dit $a(d^2-1) = 0$. Comme $a \neq 0$ et $d \in \mathbb{N}$, on obtient que $d = 1$. Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX + b$ et donc
$$0 + a(X+2) - aX - b = X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0.$$
On a donc $2a = b$ et donc $P = a(X+2)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X+2)$ (*prendre $a = 0$, permet d'inclure le polynôme nul, traité à part jusqu'à présent.*). On a alors
$$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0 + a(X+2) - a(X+2) = 0.$$
Ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des polynômes de la forme $a(X+2)$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Effectuer la division euclidienne de

1) $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 2$ par $B = X^2 + X - 3$.
2) $X^5 + 1$ par $X^2 - 2X$.

Correction :

1) On trouve $Q = X^2 - 6X + 12$ et $R = -31X + 38$.
2) On trouve $Q = X^2 + 2X^2 + 4X + 8$ et $R = 16X + 1$.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de

1) $X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ par $X - 2$,
2) $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1$ par $X^2 + 5X + 6$,
3) $X^n - 4X + 2$ par $X(X+1)(X-2)$,
4) $(X-2)^{2n} + X - 3$ par $(X-1)^2$.

Correction :

1) Le reste de la division euclidienne de $P = X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ est $P(2) = 2^7 - 3 \times 2^5 - 5 \times 2^3 + 1 = 2^3(16 - 12 - 5) + 1 = -8 + 1 = -7$.
2) D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe des uniques polynômes Q et R tels que $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1 = (X^2 + 5X + 6)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X^2 + 5X + 6)$. Ainsi $\deg(R) \leqslant 1$ et il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$. D'où :

$$(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1 = (X^2 + 5X + 6)Q + aX + b.$$

On a $X^2 + 5X + 6 = (X+2)(X+3)$. Évaluons en les racines -2 et -3 :

$$0 + (-2+3)^n - 1 = 0 - 2a + b$$

$$(-3+2)^{2n} + 0 - 1 = 0 - 3a + b$$

donc $2a = b$ et $3a = b$. On en déduit que $a = b = 0$. Finalement le reste est le polynôme nul.

3) D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe des uniques polynômes Q et R tels que $X^n - 4X + 2 = X(X+1)(X-2)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X(X+1)(X-2))$. Ainsi $\deg(R) \leqslant 2$ et il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$. D'où :

$$X^n - 4X + 2 = X(X+1)(X-2)Q + aX^2 + bX + c.$$

Évaluons en les racines du diviseur :

- En 0 : $2 = 0 + c$ donc $c = 2$
- En -1 : $(-1)^n + 4 + 2 = 0 + a - b + c$ donc $a = b + (-1)^n + 4$
- En 2 : $2^n - 8 + 2 = 0 + 4a + 2b + c$ donc $2a + b = 2^{n-1} - 4$.

Ainsi $2b + 2(-1)^n + 8 + b = 2^{n-1} - 4$ donc $3b = 2^{n-1} - 2(-1)^n - 12$ donc $b = \dfrac{2^{n-1} - 2(-1)^n - 12}{3}$ puis

$$a = \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n - 12}{3} + (-1)^n + 4 = \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n - 12 + 3(-1)^n + 12}{3} = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}.$$

Finalement le reste est le polynôme

$$\frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} X^2 + \frac{2^{n-1} - 2(-1)^n - 12}{3} X + 2.$$

4) D'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe des uniques polynômes Q et R tels que $(X-2)^{2n} + X - 3 = (X-1)^2 Q + R$ et $\deg(R) < \deg((X-1)^2)$. Ainsi $\deg(R) \leqslant 1$ et il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$. D'où :

$$(X-2)^{2n} + X - 3 = (X-1)^2 Q + aX + b.$$

Évaluons en la racine 1 de $(X-1)^2$: $(1-2)^{2n} + 1 - 3 = a + b$ donc $a + b = -3$.

Il nous faut une autre équation. Puisque 1 est racine double du diviseur, l'astuce est de dérivée et de réévaluer en 1.

Dérivons :

$$2n(X-2)^{2n-1}+1=2(X-1)Q+(X-1)^2Q'+a$$

et évaluons en 1 :

$$2n(1-2)^{2n-1}+1=0+0+a.$$

Ainsi $a=-2n+1$ et donc $b=-3-a=-2n-2$. Par conséquent $R=(-2n+1)X-2(n+1)$.

Exercice 8. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui n'est pas le monôme X.

1) Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X)^k-X^k$ est divisible par $P(X)-X$.
   On pourra s'aider de l'exercice 3 du TD n° 3.
2) Montrer que $P(P(X))-X$ est divisible par $P(X)-X$.

Correction :

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $a^n-b^n=(a-b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k$. Ainsi

$$P(X)^k-X^k=\big(P(X)-X\big)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}P(X)^{n-1-k}X^k}_{Q_k(X)}$$

et donc $P(X)^k-X^k$ est divisible par $P(X)-X$.

2) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$. On a

$$\begin{aligned}
P(P(X))-P(X)&=P(P(X))-P(X)+P(X)-X\\
&=\sum_{k=0}^{p}a_kP(X)^k-\sum_{k=0}^{p}a_kX^k+P(X)-X\\
&=\sum_{k=0}^{p}a_k\big(P(X)^k-X^k\big)+P(X)-X\\
&=\sum_{k=0}^{p}a_k\big(P(X)-X\big)Q_k(X)+P(X)-X\big)=\big(P(X)-X\big)\left(1+\sum_{k=0}^{p}a_kQ_k(X)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que $P(P(X))-X$ est divisible par $P(X)-X$.

Exercice 9.

1) Déterminer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de X^5-1 par $(X+1)^2(X+2)$.
2) Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;-2\},\qquad \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}.$$

   On pourra attendre le chapitre suivant et se ramener à un système de trois équations d'inconnues a, b et c que l'on mettra sous forme échelonnée via la méthode du pivot de Gauss.
3) En déduire une primitive de $x\longmapsto\dfrac{x^5-1}{(x+1)^2(x+2)}$ (sur des intervalles à préciser).

Correction :

1) On a $(X+1)^2(X+2) = X^3+4X^2+5X+2$ puis

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & & X^5 & & & -\ 1 & X^3+4X^2+5X+2 \\ \cline{7-7} -\ (X^5 & +\ 4X^4 & +\ 5X^3 & +\ 2X^2) & & & X^2-4X+11 \\ \cline{1-6} & -\ 4X^4 & -\ 5X^3 & -\ 2X^2 & & -\ 1 & \\ & +\ (4X^4 & +\ 16X^3 & +\ 20X^2 & +\ 8X) & & \\ \cline{1-6} & & 11X^3 & +\ 18X^2 & +\ 8X & -\ 1 & \\ & & -\ (11X^3 & +\ 44X^2 & +\ 55X & +\ 22) & \\ \cline{1-6} & & & -\ 26X^2 & -\ 47X & -\ 23 & \end{array}$$

Ainsi $X^5-1 = Q(X+1)^2(X+2)+R$ avec $Q = X^2-4X+11$ et $R = -26X^2-47X-23$.

2) Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^2$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2} &= \frac{a(x+1)(x+2)+b(x+2)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)} \\ &= \frac{a(x^2+3x+2)+b(x+2)+c(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x+2)} \\ &= \frac{x^2(a+c)+x(3a+b+2c)+2a+2b+c}{(x+1)^2(x+2)}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + c = -26 \\ 3a + b + 2c = -47 \\ 2a + 2b + c = -23 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + c = -26 & \\ b - c = 31 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 2b - c = 29 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + c = -26 & \\ b - c = 31 & \\ c = -33 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = -33 \\ b = -2 \\ a = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}, \qquad \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{7}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{33}{x+2}.$$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$, on a

$$\frac{x^5-1}{(x+1)^2(x+2)} = Q(x)+\frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = x^2-4x+11+\frac{7}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{33}{x+2}.$$

Ainsi une primitive de $x\longmapsto \dfrac{x^5-1}{(x+1)^2(x+2)}$

- sur $]-\infty,-2[$ est $x\longmapsto \dfrac{x^3}{3}-2x^2+11x+7\ln(-x-1)+\dfrac{2}{x+1}-33\ln(-x-2)$.
- sur $]-2,-1[$ est $x\longmapsto \dfrac{x^3}{3}-2x^2+11x+7\ln(-x-1)+\dfrac{2}{x+1}-33\ln(x+2)$.
- sur $]-1,+\infty[$ est $x\longmapsto \dfrac{x^3}{3}-2x^2+11x+7\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-33\ln(x+2)$.

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $P(k)=k^n$.

Correction : Il est immédiat que le polynôme X^n vérifie les conditions de l'énoncé.

Par ailleurs, si P est un polynôme de degré n tel que, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $P(k)=k^n$, alors P et X^n sont deux polynômes de degré n qui coïncident en $n+1$ racines. On en déduit que $P=X^n$. D'où l'unicité.

Exercice 11. Soit $T > 0$. Que dire d'un polynôme à coefficient réels qui est T-périodique ?

Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+T) = P(x)$. Par récurrence, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(x+kT) = P(x)$. Posons $Q = P - P(0)$. Nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $Q(kT) = P(kT) - P(0) = 0$. Ainsi le polynôme Q a une infinité de racines et donc il s'agit du polynôme nul. Par conséquent $P = P(0)$ est bien constant.

Exercice 12. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X-2)P(X+1) = (X+1)P(X)$.

Correction : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X-2)P(X+1) = (X+1)P(X)$.

- Évaluons en 2 : $0 = 3P(2)$ donc P admet 2 pour racine.
- Évaluons en -1 : $-3P(0) = 0$ donc P admet 0 pour racine.
- Évaluons en 0 : $-2P(1) = 0$ donc P admet 1 pour racine.

Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X-1)(X-2)Q$. On a donc

$$(X-2)(X+1)X(X-1)Q(X+1) = (X-2)P(X+1) = (X+1)P(X) = X(X-1)(X-2)Q(X)$$

donc $Q(X+1) = Q(X)$, par intégrité. Ainsi Q est 1-périodique et l'exercice précédent entraîne que Q est constant. Notons λ cette constante. On en déduit que $P = \lambda X(X-1)(X-2)$.

Réciproquement, on vérifie que si $P = \lambda X(X-1)(X-2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(X-2)P(X+1) = (X+1)P(X)$.

Exercice 13. Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Déterminer tous les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P \circ P = P^k$.
On pourra utiliser, en le justifiant, que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré supérieur ou égal à 1, alors $P(\mathbb{R})$ est infini.

Correction :

- On remarque que le polynôme nul est solution.
- Soit P un polynôme constant non nul égal à $a \in \mathbb{R}$. P est solution si et seulement si $a = a^k$ si et seulement si $a^{k-1} = 1$ si et seulement si $a = 1$ ou ($a = -1$ et k est impair).
- Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 solution. On a $P \circ P - P^k = 0$, c'est-à-dire $Q \circ P = 0$ avec $Q = P - X^k$. Autrement dit Q s'annule en tout point de $P(\mathbb{R})$.

  Mais P est continue donc $P(\mathbb{R})$ est un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Puisque P est non constant, $P(\mathbb{R})$ est donc un intervalle non vide et non réduit à un point. Il s'agit donc d'un ensemble infini. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines (tous les réels de $P(\mathbb{R})$) si bien qu'il s'agit du polynôme nul. Nous en déduisons que $P = X^k$.

  Réciproquement, $X^k \circ X^k = (X^k)^k$ donc X^k est bien solution.

Nous en déduisons l'ensemble des solutions est $\{-1, 0, 1, X^k\}$ si k est impair et $\{0, 1, X^k\}$ si k est pair.

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ ayant exactement n racines réelles distinctes. Combien P' possède-il de racines réelles ?

Correction : Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n racines de P rangées dans l'ordre strictement croissant. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(a_k) = P(a_{k+1})$, P est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $b_k \in \,]a_k, a_{k+1}[$ tel que $P'(b_k) = 0$.

Ainsi P' possède $n-1$ racines (forcément deux à deux distinctes) $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Mais P' est de degré $n-1$ donc il possède au plus $n-1$ racines. Ainsi P' possède exactement $n-1$ racines réelles.

Exercice 15. Que dire d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} t^2\,P^2(t)\,dt$?

Correction : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie cette condition alors, par linéarité $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)P^2(t)\,dt = 0$. Mais la fonction $t \longmapsto (1-t^2)P(t)$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ donc elle est nulle. Nous en déduisons que P admet tous les réels de $]-1,1[$ pour racine. Il admet donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. Réciproquement, le polynôme nul est bien solution.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P_n = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2 X - 2n^2 + 3n - 1$$

Correction : Si $n = 1$, alors P_n est le polynôme nul. Supposons que $n \geqslant 2$. Déjà

$$P_n(1) = (n-1) - 2(2n-1) + 2n^2 - (2n^2 - 3n + 1) = 0.$$

On dérive successivement :

- $P_n' = 2n(n-1)X^{2n-1} - 2n(2n-1)X^{n-1} + 2n^2$ donc $P_n'(1) = 2n(n-1) - 2n(2n-1) + 2n^2 = 0$.
- $P_n'' = 2n(n-1)(2n-1)X^{2n-2} - 2n(2n-1)(n-1)X^{n-2} = 2n(n-1)(2n-1)(X^{2n-2} - X^{n-2})$ donc $P_n''(1) = 0$.
- $P_n^{(3)} = 2n(n-1)(2n-1)\big((2n-2)X^{2n-3} - (n-2)X^{n-2}\big)$ donc $P_n^{(3)}(1) = 2n^2(n-1)(2n-1) \neq 0$ car $n \geqslant 2$.

Ainsi 1 est racine de P_n d'ordre de multiplicité 3.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels dont toutes les dérivées successives en a sont strictement positives. Montrer que P ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$.

Correction : La formule de Taylor pour les polynômes entraîne que

$$\forall x \in \,]a\,;+\infty[\,, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k > 0.$$

puisque $P^{(k)}(a) > 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. Enfin $P^{(0)}(a) = P(a) \neq 0$. Ainsi P ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 18 (Relations coefficients/racines). Donnons-nous $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n admettant n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (distinctes ou non). Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Correction :

- On a $P = a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$. Ainsi

$$a_0 = P(0) = a_n \prod_{k=1}^{n} (0 - \lambda) = a_n (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

  d'où l'expression pour le produit des racines.

- Si $n = 1$, on a $a_1 X + a_0 = P = a_1(X - \lambda_1)$ donc $\lambda_1 = -\dfrac{a_0}{a_1}$.

  Si $n = 2$, on a $a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = P = a_2(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = a_2 X^2 + a_2(\lambda_1 + \lambda_2)X + a_2 \lambda_1 \lambda_2$. Ainsi $\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}$.

  Ensuite procédons par récurrence. Supposons que cette propriété est vraie au rang n pour un certain $n \geqslant 2$. On a alors

$$\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) = X^n - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) X^{n-1} + R_n$$

avec $R_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k = P &= a_{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (X - \lambda_k) \\
&= a_{n+1} \left(X^n - \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) X^{n-1} + R_n \right) (X - \lambda_{n+1}) \\
&= a_{n+1} X^{n+1} - a_{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \right) X^n + \underbrace{a_{n+1}\lambda_{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) X^{n-1} + a_{n+1}(X - \lambda_{n+1}) R_n}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[X]} .
\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$a_n = -a_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k.$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples (s'il en a).

Correction : Notons $P = 1 + X + X^n$. Si $n = 1$, alors $P = 2X + 1$ admet une unique racine simplement : $-1/2$. Supposons que $n \geqslant 2$. Si P admet une racine multiple (notons-la a), alors $P(a) = a^n + a + 1 = 0$ et $na^{n-1} + 1 = P'(a) = 0$. Ainsi $na^{n-1} = -1$ donc $-a^n = \dfrac{a}{n}$ donc $a + 1 = \dfrac{a}{n}$ donc $a\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -1$ donc $a = \dfrac{n}{1-n}$.

Par conséquent $n\left(\dfrac{n}{1-n}\right)^{n-1} = -1$ donc $n^n = -(1-n)^{n-1}$. C'est absurde (car n et $1-n$ n'ont pas la même parité donc leurs puissances non plus).

Exercice 20 (D'après l'oral de ESCP). Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On recherche $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n tel que P' divise P.

1) Supposons qu'un tel P existe. Montrer alors qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, $P = \dfrac{1}{n}(X - \alpha)P'$.
2) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P puis en déduire P. Conclure.
3) Recommencer l'exercice en déterminant cette fois la multiplicité de α.
   On utilisera encore la question 1 mais on ne déterminera pas de relation de récurrence.

Correction :

1) Puisque P' divise P, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP'$. On a donc $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(P')$ donc $n = \deg(Q) + n - 1$ et donc $\deg(Q) = 1$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que $Q = aX + b$. De plus on a $a_n = a \times na_n$ donc $a = \dfrac{1}{n}$. Il s'ensuit que $Q = \dfrac{1}{n}(X - nb) = \dfrac{1}{n}(X - \alpha)$ avec $\alpha = nb$.
2) On a
$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P = \frac{1}{n}(X - \alpha)P' = \frac{1}{n}(X - \alpha) \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$
donc, en développant et en faisant un changement d'indice :
$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} a_k X^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha k}{n} a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha}{n}(k+1) a_{k+1} X^k.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient $a_0 = \frac{\alpha}{n} a_1$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad a_k = \frac{k}{n} a_k - \frac{\alpha}{n}(k+1) a_{k+1}.$$

Ainsi

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_k = -\frac{\alpha(k+1)}{n-k} a_{k+1}.$$

3) D'où $a_{n-1} = -\alpha n a_n$, $a_{n-2} = \frac{\alpha^2 n(n-1)}{2} a_n$, $a_{n-3} = -\frac{\alpha^3 n(n-1)(n-2)}{6} a_n$, etc. Par récurrence, on obtient

$$\forall k \in [\![1\,; n]\!], \qquad a_{n-k} = \frac{(-\alpha)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} a_n = \binom{n}{k}(-\alpha)^k a_n.$$

Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$P = a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}(-\alpha)^{n-k} X^k = a_n (X-\alpha)^k.$$

Récapitulons : si P est divisible par P', alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = a_n(X-a)^n$. Réciproquement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = a_n(X-a)^n$, alors $P' = a_n n(X-a)^{n-1}$ et donc $P = \frac{1}{n}(X-a)P'$: P' divise P.

4) Notons k la multiplicité de α. Il existe Q tel que $P = (X-a)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$. On a $P' = k(X-\alpha)^{k-1}Q + (X-\alpha)^k Q'$. Ainsi $(X-a)^k Q = P = P'B = \frac{1}{n}k(X-\alpha)^k Q + \frac{1}{n}(X-\alpha)^{k+1}Q'$. Par intégrité, on obtient : $Q = \frac{k}{n}Q + (X-\alpha)Q'$. Évaluons en α : $Q(\alpha) = \frac{k}{n}Q(\alpha)$. Comme $Q(\alpha) \neq 0$, on en déduit que $1 = \frac{k}{n}$ et donc $k = n$.

On en déduit que $P = (X-a)^n Q$. Mais comme P est de degré n, Q est alors un coefficient constant, qui vaut a_n. Ainsi : $P = a_n(X-\alpha)^n$.

Exercice 21 (Polynôme de Lagrange). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, déterminer un polynôme L_i de degré $n-1$ vérifiant $L_i(a_i) = 1$ et, pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$.
2) Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$, $L(a_j) = b_j$.
3) Application : trouver l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la courbe représentative (dans un repère orthonormé) joint les points $(-1, 10)$, $(0, 8)$, $(1, 0)$ et $(2, -8)$.

Correction :

1) Soit $i \in [\![1\,; n]\!]$. On cherche L_i de degré $n-1$ admettant $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ pour racines. Il s'écrit donc sous la forme

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j),$$

avec λ son coefficient dominant. On a aussi avoir

$$1 = L_i(a_i) = \lambda \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)$$

donc $\lambda = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{1}{a_i - a_j}$.

Réciproquement, on vérifie que

$$L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

convient.

2) Posons
$$L=\sum_{i=1}^{n} b_i L_i.$$
Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$,
$$L(a_j)=\sum_{i=1}^{n} b_i L_i(a_j)=0+\cdots+0+b_i\times 1+0+\times+0=b_i.$$
Ainsi L convient.

Supposons $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifient aussi
$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \qquad P(a_j)=b_j.$$
Il coïncide avec L en n valeurs distinctes donc $P=L$. D'où l'unicité.

3) Ici on a $a_1=-1$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=2$, $b_1=10$, $b_2=8$, $b_3=0$ et $b_4=-8$. On a donc
$$L_1=\frac{X(X-1)(X-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)}=-\frac{1}{6}X(X-1)(X-2),$$
$$L_2=\frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(X+1)(X-1)(X-2),$$
$$L_3=\frac{(X+1)X(X-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)}=-\frac{1}{2}(X+1)X(X-2),$$
$$L_4=\frac{(X+1)X(X-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}=\frac{1}{6}(X+1)X(X-1).$$
Le polynôme recherché est donc
$$\begin{aligned}L=10L_1+8L_2+0\times L_3-8L_4&=-\frac{5}{3}X(X-1)(X-2)+4(X+1)(X-1)(X-2)-\frac{4}{3}(X+1)X(X-1)\\&=-\frac{X(X-1)}{3}(5X-10+4X+4)+4(X+1)(X-1)(X-2)\\&=-X(X-1)(3X-2)+4(X+1)(X-1)(X-2)\\&=(X-1)(-3X^2+2X+4X^2-4X-8)\\&=(X-1)(X^2-2X-8)\\&=(X-1)(X+2)(X-4).\end{aligned}$$

Exercice 22 (Oral ESCP 2010).

1) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ qui peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(P'(x)\big)^2 \geqslant P(x)P''(x).$$
On pourra considérer la fonction $\ln(|P|)$... mais attention à son domaine de définition.

2) Réciproquement, supposons que $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $\big(P'(x)\big)^2 \geqslant P(x)P''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Peut-on écrire P comme produit de polynômes de degré 1 ?

Correction :

1) Supposons P non constant (sinon le résultat est évident). Par hypothèse
$$P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ désignent les racines de P (pas forcément deux à deux distinctes) et λ le coefficient dominant.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si $x \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$,

$$\ln(|P(x)|) = \ln(|\lambda|) + \sum_{j=1}^{n} \ln(|x - \alpha_j|).$$

Ainsi $\ln(|P|)$ est deux fois dérivable sur $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ et, pour tout $x \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$,

$$\big(\ln(|P|)\big)'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_j}.$$

puis

$$\big(\ln(|P|)\big)''(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{(x - \alpha_j)^2} < 0.$$

Mais on a aussi $\big(\ln(|P|)\big)''(x) = \left(\dfrac{P'}{P}\right)'(x) = \dfrac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{P^2(x)}$. Ainsi

$$\frac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{P^2(x)} < 0$$

et donc $\big(P'(x)\big)^2 \geqslant P(x)P''(x)$.

C'est immédiat si x est l'une des racines, puisque alors l'inégalité devient $\big(P'(x)\big)^2 \geqslant 0$.

2) La réciproque est fausse. Par exemple $P = X^3 + X$ est tel que

$$(P')^2 - PP'' = (3X^2 + 1)^2 - 6X(X^3 + X) = 3X^4 + 1$$

est positif mais pourtant il n'admet pas de racines.

Exercice 23 (Polynôme mystère).

1) Le polynôme P est degré 4 et vérifie $P(1) = P(2) = P'(2) = 0$, $P(0) = 4$ et $P(3) = 1$. Qui est-il ?
2) Le polynôme Q est de degré 2024, admet -3 pour racine d'ordre de multiplicité 795, 3 pour racine d'ordre de multiplicité 1228, 1 pour racine simple et son coefficient constant est 3^{2023}. Qui est-il ?
3) Le polynôme R est de degré 4 vérifie $R'(1) = R''(1) = R^{(3)}(1) = 0$, $R^{(4)}(1) = 12$ et $R(-1) = 0$. Qui est-il ?

Correction :

1) Puisque $P(1) = P(2) = P'(2) = 0$, le polynôme $(X-1)(X-2)^2$ divise P. Comme P est de degré 4, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P = \lambda(X-1)(X-2)^2(X-a)$.
   - On a $P(0) = 4$ donc $4 = \lambda(-1)(-2)^2(-a)$ donc $1 = \lambda a$. On a
   - On a $P(3) = 1$ donc $1 = \lambda \times 2 \times 1^2 \times (3-a)$ donc $\dfrac{1}{2} = 3\lambda - \lambda a$ donc $\dfrac{1}{2} = 3\lambda - 1$ donc $\dfrac{3}{2} = 3\lambda$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{2}$ puis $a = 2$.

   Finalement $P = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)^3$.
2) On sait que $(X+3)^{795}(X-3)^{1227}(X-1)$ divise Q. Comme $795 + 1228 + 1 = 2024$ et que Q est de degré 2023, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X+3)^{793}(X-3)^{1227}(X-1)$. Son coefficient constant est égal à $Q(0)$, c'est-à-dire $\lambda 3^{795}(-3)^{1228}(-1) = 3^{2023}$. On en déduit que $\lambda = 1$. Finalement $Q = (X+3)^{795}(X-3)^{1287}(X-1)$.
3) Le polynôme R' est de degré 3 et admet 1 pour racine triple. Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R' = \lambda(X-1)^3$. On a donc $R'' = 3\lambda(X-1)^2$, $R^{(3)} = 6\lambda(X-1)$ puis $R^{(4)} = 6\lambda$. On en déduit que

$\lambda = 2$. Finalement $R' = 2(X-1)^3$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $R = \dfrac{(X-1)^4}{2} + C$. On évalue en -1 : $0 = \dfrac{(-2)^4}{2} + C = 8 + C$ donc $C = -8$:

$$R = \frac{(X-1)^4}{2} - 8 = \frac{(X-1)^4 - 16}{2} = \frac{((X-1)^2-4)((X-1)^2+4)}{2}.$$

Le polynôme $(X-1)^2 + 4 = X^2 - 2X + 5$ n'admet pas de racines (puisque strictement positif). On a enfin

$$(X-1)^2 - 4 = (X-1-4)(X-1+4) = (X-5)(X+3).$$

Finalement $R = \dfrac{1}{2}(X-5)(X+3)(X^2-2X+5)$.

Exercice 24.

1) Factoriser (au maximum) $-3X^4 - 2X^3 + 49X^2 - 76X + 20$ en commençant par montrer que 2 est racine puis en déterminant son ordre de multiplicité.
2) Factoriser (au maximum) $X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$ en commençant par montrer que -2 est racine puis en déterminant son ordre de multiplicité.
3) Factoriser (au maximum) $X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$ en cherchant d'abord une racine évidente puis en déterminant son ordre de multiplicité.
4) Factoriser (au maximum) $2X^6 + 3X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 18X^2 - 5X$ en cherchant d'abord deux racines évidentes puis en déterminant leurs ordres de multiplicité.

Correction :

1) Notons $P = -3X^4 - 2X^3 + 49X^2 - 76X + 20$. On a

$$\begin{aligned} P(2) &= -3 \times 2^4 - 2 \times 2^3 + 49 \times 2^2 - 76 \times 2 + 20 \\ &= -3 \times 2^4 - 2^4 + (49 - 38 + 5) \times 2^2 \\ &= -2^6 + 16 \times 2^2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi 2 est racine de P. Ensuite on a $P' = -12X^3 - 6X^2 + 98X - 76$ et

$$\begin{aligned} P'(2) &= -12 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 98 \times 2 - 76 \\ &= -3 \times 2^5 - 3 \times 2^3 + 49 \times 2^2 - 19 \times 2^2 \\ &= 2^2(-3 \times 2^3 - 3 \times 2 + 30) \\ &= 2^2(-24 - 6 + 30) = 0. \end{aligned}$$

Ensuite on a $P'' = -36X^2 - 12X + 98$ et $P''(2) = -70$ donc 2 est racine double de P. En effectuant la division euclidienne de P par $(X-2)^2$, on obtient $P = (X-2)^2(-3X^2 - 14X + 5) = -3(X-2)^2(X-1/3)(X+5)$.

2) Notons $P = X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$. On a

$$\begin{aligned} P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 18(-2)^2 - 52(-2) - 40 &= 2^4 - 2^3 - 9 \times 2^3 + 13 \times 2^3 - 5 \times 2^3 \\ &= 2^3(2 - 1 - 9 + 13 - 5) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi -2 est racine de P. Ensuite on a $P' = 4X^3 + 3X^2 - 36X - 52$ et

$$\begin{aligned} P'(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 36(-2) - 52 &= -2^5 + 3 \times 2^2 + 9 \times 2^3 - 13 \times 2^2 \\ &= 2^2(-8 + 3 + 18 - 13) = 0. \end{aligned}$$

Ensuite on a $P'' = 12X^2 + 6X - 36$ et

$$P''(-2) = 12 \times 4 - 6 \times 4 - 36 = 0.$$

Ensuite on a $P^{(3)} = 24X + 6$ et $P^{(3)}(-3) \neq 0$. Ainsi -2 est de multiplicité 3.

On en déduit que P est divisible par $(X+2)^3$. Puisque P est de degré 4 et unitaire, il a la forme $(X+2)^3(X-a)$ avec a tel que $2^3 \times (-a) = -40$ (ce qu'on obtient en regardant les coefficients constants). Autrement dit $a = 5$. Finalement :

$$P = (X+2)^3(X-5).$$

3) On a $1 - 4 + 8 - 10 + 7 - 2 = 0$ donc 1 est racine de $P = X^5 - 4X^4 + 8X^3 - 10X^2 + 7X - 2$. Cherchons son ordre de multiplicité. On a $P' = 5X^4 - 16X^3 + 24X^2 - 20X + 7$ et

$$P'(1) = 5 - 16 + 24 - 20 + 7 = 0$$

puis $P'' = 20X^3 - 48X^2 + 48X - 20$ et

$$P''(1) = 20 - 48 + 48 - 20 = 0$$

puis $P^{(3)} = 60X^2 - 96X + 48$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine d'ordre 3. La division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ donne $P = (X-1)^3(X^2 - X + 2)$ et on s'arrête là puisque $X^2 - X + 2$ a un discriminant strictement négatif.

4) Notons $P = 2X^6 + 3X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 18X^2 - 5X$. Bien sûr X est racine : $P = XQ$ avec $Q = 2X^5 + 3X^4 - 8X^3 - 22X^2 - 18X - 5$. On a

$$Q(-1) = -2 + 3 + 8 - 22 + 18 - 5 = 0.$$

Ainsi -1 est racine de Q. On a $Q' = 10X^4 + 12X^3 - 24X^2 - 44X - 18$ et

$$Q'(-1) = 10 - 12 - 24 + 44 - 18 = 0.$$

Ensuite $Q'' = 40X^3 + 36X^2 - 48X - 44$ et

$$Q''(-1) = -40 + 36 + 48 - 44 = 0.$$

Ensuite $Q^{(3)} = 120X^2 + 72X - 48$ et

$$Q^{(3)}(-1) = 120 - 72 - 48 = 0.$$

Ensuite $Q^{(4)} = 240X + 72$ et $Q^{(4)}(-1) \neq 0$. Ainsi -1 est de multiplicité 4. Puisque Q est de degré 5, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q = 2(X+1)^4(X-a)$. En regardant le coefficient constant, on a $-5 = 2(-a)$ donc $a = \dfrac{5}{2}$. Finalement

$$P = 2X(X-1)^4(X - 5/2).$$

Exercice 25. Factoriser (au maximum) les polynômes suivants :

$$P = -2X^4 + X^2 + 3, \qquad Q = X^4 + 5X^2 + 6, \qquad R = 3X^4 - 17X^2 + 10 \qquad \text{et} \qquad S = 4X^4 - 3X^2 + 1.$$

On se ramera à un trinôme du second degré ou on fera apparaître le début d'une identité remarquable.

Correction :

- $P = A(X^2)$ avec $A = -2X^2 + X + 3 = -2(X+1)(X - 3/2)$. Ainsi

$$P = -2(X^2+1)(X^2 - 3/2) = -2(X^2+1)\left(X - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

- $Q = B(X^2)$ avec $B = X^2 + 5X + 6 = (X+2)(X+3)$. Ainsi

$$Q = (X^2+2)(X^2+3).$$

- $R = C(X^2)$ avec $C = 3X^2 - 17X + 10$. Le discriminant de C est $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 10 \times 3 = 289 - 120 = 169 = 13^2$ donc il admet deux racines : $\dfrac{17 \pm 13}{2 \times 3}$, i.e. 5 et $2/3$. Ainsi $C = 3(X-5)(X-2/3)$ et donc

$$R = 3(X^2-5)(X^2-2/3) = 3\left(X - \sqrt{5}\right)\left(X + \sqrt{5}\right)\left(X - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

- $S = D(X^2)$ avec $D = 4X^2 - 3X + 1$ mais D n'admet pas de racine. On essaye de faire apparaître une identité remarquable :

$$\begin{aligned} S = 4X^4 - 3X^2 + 1 &= (2X^2+1)^2 - 4X^2 - 3X^2 \\ &= (2X^2+1)^2 - 7X^2 \\ &= (2X^2+1)^2 - (\sqrt{7}X)^2 \\ &= (2X^2 - \sqrt{7}X + 1)(2X^2 + \sqrt{7}X + 1). \end{aligned}$$

Exercice 26. Factoriser (au maximum) $X^6 + 11X^4 + 59X^2 + 49$.
On commencera par se ramener à un polynôme de degré 3 puis on lui cherchera une racine évidente.

Correction : Notons $P = X^6 + 11X^4 + 59X^2 + 49$. On a $P = Q(X^2)$ avec $Q = X^3 + 11X^2 + 39X + 49$. On remarque que $Q(-1) = -1 + 11 - 59 + 49 = 0$ donc on peut factoriser Q par $X+1$. Une division euclidienne de Q par $X+1$ donne $Q = (X+1)(X^2+10X+49)$. Le trinôme $X^2 - 10X + 49$ a un discriminant strictement négatif donc pas de racine. On a

$$P = (X^2+1)(X^4+10X^2+49).$$

Faisons apparaître une identité remarquable :

$$\begin{aligned} X^4 + 10X^2 + 49 &= (X^2+7)^2 - 14X^2 + 10X^2 \\ &= (X^2+7)^2 - 4X^2 \\ &= (X^2 - 2X + 7)(X^2 + 2X + 7). \end{aligned}$$

Ainsi

$$P = (X^2+1)(X^2-2X+7)(X^2+2X+7).$$

Exercice 27. Factoriser (au maximum) les polynômes suivant :
1) $X^2 - 1$, $X^2 + 1$ puis $X^4 - 1$.
2) $X^4 + 1$ puis $X^8 - 1$.
3) $X^8 + 1$ puis $X^{16} - 1$.

Correction :

1)
- $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
- $X^2 + 1$ est déjà factorisé
- $X^4 - 1 = (X^2+1)(X^2-1) = (X^2+1)(X-1)(X+1)$.

2)
- $X^4 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2$ donc

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1).$$

- $X^8 - 1 = (X^4+1)(X^4-1)$ donc

$$X^8 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1).$$

3)
- $X^8 + 1 = (X^2)^4 + 1 = (X^4 + \sqrt{2}X^2 + 1)(X^4 - \sqrt{2}X^2 + 1)$. On factoriser chacun des deux polynômes en faisant apparaître une identité remarquable :

— $X^4+\sqrt{2}X^2+1=(X^2+1)^2-2X^2+\sqrt{2}X^2=(X^2+1)^2-(\sqrt{2-\sqrt{2}}X)^2$ donc

$$X^4+\sqrt{2}X^2+1=(X^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)(X^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1).$$

— De même :

$$X^4-\sqrt{2}X^2+1=(X^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)(X^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1).$$

Ainsi

$$X^8+1=(X^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)(X^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)(X^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)(X^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1).$$

- $X^{16}-1=(X^8+1)(X^8-1)$ donc

$$\begin{aligned}X^{16}-1=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)\\(X^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}X+1)(X^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)(X^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}X+1)\end{aligned}$$

Exercice 28. Factoriser (au maximum) les polynômes suivant :
1) X^3-1, X^3+1 puis X^6-1.
2) X^6+1 puis $X^{12}-1$.

Correction :

1) • $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$.
   • $X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$.
   • $X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.
2) • $X^6+1=(X^2)^3+1=(X^2+1)(X^4-X^2+1)$. On fait apparaître un trinôme du second degré :

$$X^4-X^2+1=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

Ainsi

$$X^6+1=(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

   • $X^{12}-1=(X^6-1)(X^6+1)$ donc

$$X^{12}-1=(X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

Exercice 29. En utilisant les deux exercices précédents, ainsi que l'exercice 3 de la feuille d'exercice 3, factoriser (au maximum) les polynômes X^3+X^2+X+1 et $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$.

Correction :

- On a $X^4-1=(X-1)(X^3+X^2+X+1)$ et aussi

$$X^4-1=(X^2+1)(X-1)(X+1).$$

En simplifiant par $X-1$, on obtient :

$$X^3+X^2+X+1=(X^2+1)(X+1).$$

- On a $X^6-1=(X-1)(X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)$ et aussi

$$X^6-1=(X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1).$$

En simplifiant par $X-1$, on obtient :

$$X^5+X^4+X^3+X^2+X+1=(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1).$$

Exercice 30. Développer les deux polynômes suivants :

$$\left(X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right) \quad \text{et} \quad \left(X^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right).$$

En déduire une factorisation de X^5-1 et X^5+1.
On utilisera l'exercice 3 de la feuille d'exercice 3.

Correction : On obtient

$$\left(X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right)=X^4+X^3+X^2+X+1$$

et

$$\left(X^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right)=X^4-X^3+X^2-X+1.$$

Ainsi

$$X^5-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)=(X-1)\left(X^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right)$$

et

$$X^5+1=(X+1)(X^4-X^3+X^2-X+1)=(X-1)\left(X^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}X+1\right)\left(X^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}X+1\right).$$

Exercice 31. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $k\in[\![1\,;n+1]\!]$, $P(k)=\frac{1}{k}$.
Calculer $P(n+2)$.
On pourra introduire $Q=XP-1$.

Correction : *On réécrit la dernière condition en terme de « un polynôme admet des racines ».*

Posons $Q=XP-1$.

- Le polynôme Q est de degré $n+1$.
- Pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, $Q(k)=kP(k)-1=0$.

Nous en déduisons qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$Q=\lambda\prod_{k=1}^{n+1}(X-k).$$

Évaluons en un autre point : $Q(0)=0\times P(0)-1=-1$ donc

$$-1=\lambda\prod_{k=1}^{n+1}(0-k)=\lambda(-1)^{n+1}(n+1)!.$$

Ainsi $\lambda=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

On a $P(n+1)=\frac{Q(n+2)+1}{n+2}$ et

$$Q(n+2)=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(n+2-k)=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n+1}j=(-1)^n.$$

On en déduit que $P(n+2)=\frac{1+(-1)^n}{n+2}$.