Correction de quelques exercices de la feuille de TD 16

Exercice 3. En écrivant leurs dénominateurs respectifs sous forme canonique, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivante (sur des intervalles à préciser) :

$$1)\ x \longmapsto \frac{1}{x^2-2x+5}, \qquad 2)\ x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1} \qquad 3)\ x \longmapsto \frac{6x}{x^4+4x^2+13}.$$

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^4+4x^2+13 = (x^2+2)^2+9 = 9\left(\left(\frac{x^2+2}{3}\right)^2+1\right)$$

donc

$$\frac{6x}{x^4+4x^2+13} = \frac{2x/3}{\left(\frac{x^2+2}{3}\right)^2+1}.$$

Ainsi $x \longmapsto \dfrac{6x}{x^4+4x^2+13}$ admet $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x^2+2}{3}\right)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. A l'aide de formules de trigonométrie montrées dans l'exercice 1 de la feuille d'exercices n° 5, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $t \mapsto \cos(\alpha t)\cos(\beta t)$, 2) $t \mapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t)$, 3) $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t)$, 4) $t \mapsto \sin^4(t)$, 5) $t \mapsto \cos^5(t)$

Correction : Supposons que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, sinon c'est immédiat.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\alpha t)\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((\alpha+\beta)t\right)+\cos\left((\alpha-\beta)t\right)\right).$$

- Si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{2(\alpha+\beta)}\sin\left((\alpha+\beta)t\right)+\dfrac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin\left((\alpha-\beta)t\right)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\cos(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2\alpha}\sin(\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\cos(\beta t) = \cos^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\alpha t)\sin(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((\alpha+\beta)t\right)+\sin\left((\beta-\alpha)t\right)\right).$$

- Si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$, alors $t \longmapsto -\dfrac{1}{2(\alpha+\beta)}\cos\left((\alpha+\beta)t\right)-\dfrac{1}{2(\beta-\alpha)}\cos\left((\beta-\alpha)t\right)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha = \beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{-1}{2\alpha}\cos(2\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t) = \dfrac{1}{2}\sin(2\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha = -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{2\alpha}\cos(2\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t) = \dfrac{-1}{2}\sin(2\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\alpha t)\sin(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((\alpha-\beta)t\right)-\cos\left((\alpha+\beta)t\right)\right).$$

- Si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{2(\alpha-\beta)} \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\, t\right) - \dfrac{1}{2(\alpha+\beta)} \sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\, t\right)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha = \beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2\alpha} \sin(\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t) = \sin^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha = -\beta$, alors $t \longmapsto -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2\alpha} \sin(\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t) = -\sin^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^4(t) = (\sin^2(t))^2 &= \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos(2t) + \frac{1+\cos(4t)}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t).
\end{aligned}$$

Donc $t \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4t) - \dfrac{1}{4}\sin(2t) + \dfrac{3t}{8}$ est une primitive de $t \longmapsto \sin^4(t)$ sur $\mathbb{R}$.

5) De façon analogue, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos^5(t) = \frac{1}{16}\cos(5t) + \frac{5}{16}\cos(3t) + \frac{5}{8}\cos(t).$$

Ainsi $t \longmapsto \cos^5(t)$ admet $t \longmapsto \dfrac{1}{80}\sin(5t) + \dfrac{5}{48}\sin(3t) + \dfrac{5}{8}\sin(t)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (Primitives et décomposition en éléments simples).

1) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3;0;3\}, \qquad \frac{9}{x(x^2-9)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+3}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{9}{x(x^2-9)}$ (sur un intervalle à préciser).

2) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$

En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (sur un intervalle à préciser).

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} &= \frac{ax+b+(cx+d)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \\
&= \frac{cx^3+dx^2+(a+2c+2d)x+b+2c+2d}{(x^2+2x+2)^2}
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre (a,b,c,d) tels que $c=0$, $d=1$, $a+2c+2d=1$ et $b+2c+2d=1$. Ainsi $(a,b,c,d) = (-1,-1,0,1)$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-1}{2}\,\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{1+(1+x)^2}.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ admet donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x^2+2x+2)} + \mathrm{Arctan}(1+x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (★ à ★★) A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(3x)\,dx$, 2) $\displaystyle\int_0^1 a^3 e^{-\frac{a^2}{2}}\,da$, 3) $\displaystyle\int_1^e \ln^2(w)\,dw$, 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) La fonction $w \longmapsto (\ln(w))^2$ est continue sur $[1, e]$ donc l'intégrale existe.
Faisons une IPP avec les fonctions $u : w \longmapsto w\ln(w) - w$ et $v : w \longmapsto \ln(w)$ de classe C^1 sur $[1, e]$. On a $u' : w \longmapsto \ln(w)$ et $v' : a \longmapsto \dfrac{1}{w}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\ln(w))^2\,dw &= [(w\ln(w) - w)\ln(w)]_1^e - \int_0^1 (w\ln(w) - w)\frac{1}{w}\,dw \\
&= e - e - 0 - \int_0^1 (\ln(w) - 1)\,dw \\
&= -[w\ln(w) - w - w]_1^e \\
&= -(e - 2e) + (0 - 2) = e - 2
\end{aligned}$$

4) La fonction $t \longmapsto \sin(2t)e^{\cos(t)} = 2\cos(t)\sin(t)e^{\cos(t)}$ est continue sur $[0, \pi/2]$ dont l'intégrale existe.
Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto 2\cos(t)$ et $v : t \longmapsto -e^{\cos(t)}$ de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. On a $u' : x \longmapsto -2\sin(t)$ et $v' : x \longmapsto \sin(t)e^{\cos(t)}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt &= [-2\cos(t)e^{\cos(t)}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-2\sin(t))(-e^{\cos(t)})\,dt \\
&= 0 + 2e - 2\int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{\cos(t)}\,dt \\
&= 2e - 2[-e^{\cos(t)}]_0^{\pi/2} \\
&= 2e + 2(1 - e) = 2.
\end{aligned}$$

Exercice 8. A l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
2) $x \mapsto \cos(\ln(x))$
(*On pourra faire deux IPP consécutives*),
3) $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) $x \longmapsto \dfrac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v : x \longmapsto \ln(x)$ de classe C^1 sur $[1, t]$. On a $u' : x \longmapsto x^\alpha$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ donc

$$\begin{aligned}\int_1^t x^\alpha \ln(x)\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}\,dx &= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t) - 0 - \left[\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right]_1^t \\ &= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t) - \frac{t^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi f admet $t \longmapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t) - \dfrac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \dfrac{x^3}{3}\dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ est continue sur $]1;+\infty[$ donc elle admet une primitive sur $]1;+\infty[$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$ et $v : x \longmapsto \dfrac{(1+x^3)^{-1/4+1}}{-1/4+1} = \dfrac{4}{3}(1+x^3)^{3/4}$ de classe C^1 sur $[1,t]$. On a $u' : x \longmapsto x^2$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}\ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{3}\frac{4}{3}(1+x^3)^{3/4}\right]_0^t - \int_0^t x^2\frac{4}{3}(1+x^3)^{3/4}\,dx \\ &= \frac{4t^3}{9}(1+t^3)^{3/4} - 0 - \frac{4}{9}\int_0^t 3x^2\,dx \\ &= \frac{4t^3}{9}(1+t^3)^{3/4} - \frac{4}{9}\left[\frac{(1+x^3)^{3/4+1}}{3/4+1}\right]_0^t \\ &= \frac{4t^3}{9}(1+t^3)^{3/4} - \frac{4}{9}\frac{4}{7}\big((1+t^3)^{7/4}-1\big).\end{aligned}$$

Ainsi f admet $t \longmapsto \dfrac{4t^3}{9}(1+t^3)^{3/4} - \dfrac{4}{9}\dfrac{4}{7}(1+t^3)^{7/4} = \dfrac{4(3t^3-4)}{9\times 7}(1+t^3)^{3/4}$ pour primitive sur $]1;+\infty[$.

Exercice 9. Avec un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

1) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{t-1}$, calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$.

2) À l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x)\cos^3(x)\,dx$.

3) a) Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1}$.

   b) À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

4) À l'aide du changement de variable $x = \cos(2t)$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.
   On utilisera le fait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1-\cos(2t) = 2\sin^2(t)$, $1+\cos(2t) = 2\cos^2(t)$ et $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$. Comment montrer ces formules déjà ?

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) La fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est continue sur $[0,1/2]$ donc l'intégrale a un sens.

Faisons le changement de variables $x = cos(t)$ avec cos de classe C^1 sur $[\pi/2, \pi/3]$ ($x = 0$ si $t = \pi/2$ et $x = 1/2$ si $t = \pi/3$). On a « $dx = -\sin(t)\,dt$ » :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{\frac{1+\cos(t)}{1-cos(t)}}\,(-\sin(t))\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos(t)}{1-cos(t)}}\,\sin(t)\,dt.$$

Là il faut se rappeler les formules de trigonométrie (guidées en DS/concours) : $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ *et* $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^2(t/2)}{\sin^2(t/2)}}\,\sin(t)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,\sin(t)\,dt,$$

puisque $\cos(t/2) > 0$ et $\sin(t/2)$ lorsque $t \in [\pi/3, \pi/2]$. Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,2\sin(t/2)\cos(t/2)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\cos^2(t/2)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1+\cos(t))\,dt.$$

et donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = [t+\sin(t)]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 10. Avec un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

$$1)\ x \mapsto e^{\sqrt{x}}, \qquad 2)\ x \mapsto \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}, \qquad 3)\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}, \qquad 4)\ x \mapsto \tan^4(x).$$

On fera les changements de variables $t = e^{\sqrt{x}}$ *pour le 1,* $x = \sqrt[3]{t^2-1}$ *pour le 3 et* $x = \mathrm{Arctan}(t)$ *pour le 4 (et on pourra utiliser le fait que, pour tout* $z \in \mathbb{R}$, $z^4 = 1 + (z^2-1)(z^2+1)$*).*

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours.

3) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (aussi sur $[-1;0[$) donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et calculons $\displaystyle\int_1^y \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx$ à l'aide du changement de variables $t = \sqrt{1+x^3}$ ou plutôt $x = (t^2-1)^{1/3}$ de classe C^1 sur $[\sqrt{2}, \sqrt{1+y^3}]$ ($x = 1$ si $t = \sqrt{2}$ et $x = y$ si $t = \sqrt{1+y^3}$). On a « $dx = \dfrac{1}{3}2t(t^2-1)^{-2/3}\,dt$ » :

$$\int_1^y \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \frac{t}{(t^2-1)^{1/3}}\,\frac{1}{3}2t(t^2-1)^{-2/3}\,dt = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt.$$

Méthode 1. On fait une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ et $t \longmapsto \ln(t^2-1)$ de classe C^1 sur $[\sqrt{2}; \sqrt{1+y^3}]$.

On a $u' : t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{2t}{t^2-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_1^y \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx &= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{t}{2}\ln(t^2-1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} - \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \frac{1}{2}\ln(t^2-1)\,dt\right)\\
&= \frac{\sqrt{1+y^3}}{3}\ln(1+y^3-1) - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1) - \frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \big(\ln(t-1)+\ln(t+1)\big)\,dt\\
&= \sqrt{1+y^3}\ln(y) - \frac{1}{3}\left[(t-1)\ln(t-1)-(t-1)+(t+1)\ln(t+1)-(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}}\\
&= \sqrt{1+y^3}\ln(y) - \frac{1}{3}\left[t\ln(t^2-1)+t\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-2t\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}}\\
&= \sqrt{1+y^3}\ln(y) - \frac{\sqrt{1+y^3}}{3}\ln(1+y^3-1) - \frac{\sqrt{1+y^3}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{1+y^3}+1}{\sqrt{1+y^3}-1}\right) + 2\frac{\sqrt{1+y^3}}{3}\\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1) + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) - 2\frac{\sqrt{2}}{3}\\
&= \frac{\sqrt{1+y^3}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{1+y^3}-1}{\sqrt{1+y^3}+1}\right) + 2\frac{\sqrt{1+y^3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - 2\frac{\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Une primitive de $y \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+y^3}}{y}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y \longmapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+y^3} + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+y^3}-1}{\sqrt{1+y^3}+1}\right)$.

Méthode 2. On remarque que

$$\int_1^y \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}} \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\,dt.$$

Or, pour tout $t \in]1;+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1}{(t+1)(t-1)} = \dfrac{1}{2(t-1)} - \dfrac{1}{2(t+1)}$ (*C'est classique – cf. question 3a de l'exercice précédent – et il y aurait eu certainement une question intermédiaire en concours*). Ainsi une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2-1}$ sur $]1;+\infty[$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(t-1) - \dfrac{1}{2}\ln(t+1) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$. D'où

$$\int_1^y \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx = \frac{2}{3}\left[t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+y^3}}.$$

Une primitive de $y \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+y^3}}{y}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc $y \longmapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{1+y^3} + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+y^3}-1}{\sqrt{1+y^3}+1}\right)$.

4) La fonction $x \longmapsto \tan^4(x)$ est continue sur $]-\pi/2;\pi/2[$ (mais aussi sur $]\pi/2;3\pi/2[$, $]3\pi/2;3\pi/2[$, etc.) donc elle admet une primitive sur $]-\pi/2;\pi/2[$.

Soit $y \in]-\pi/2;\pi/2[$ et calculons $\displaystyle\int_0^y \tan^4(x)\,dx$ à l'aide du changement de variables $t = \tan(x)$ ou plutôt $x = \operatorname{Arctan}(t)$ de classe C^1 sur $[0;tan(y)]$ ($x = 0$ si $t = 0$ et $x = \tan(y)$ si $t = y$). On a « $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ » :

$$\begin{aligned}
\int_1^y \tan^4(x)\,dx = \int_0^{\tan(y)} t^4\,\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan(y)} \left(\frac{1+(t^2-1)(t^2+1)}{1+t^2}\right)\,dt &= \int_0^{\tan(y)} \left(\frac{1}{1+t^2}+t^2-1\right)\,dt\\
&= \left[\operatorname{Arctan}(t) + \frac{t^3}{3} - t\right]_0^{\tan(y)}
\end{aligned}$$

Une primitive de $y \longmapsto \tan^4(y)$ sur $]-\pi/2;\pi/2[$ est donc $y \longmapsto y + \dfrac{\tan^3(y)}{3} - \tan(y)$.

Exercice 12. (★ à ★★) Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_{-3}^{4} \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx, \qquad 2)\ \int_{-1}^{1} e^{-|u|}\,du, \qquad 3)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx.$$

Correction :

1) La fonction $x \longmapsto \dfrac{|x+1|}{|x|+1}$ est continue sur $[-3,4]$ donc l'intégrale a bien un sens. Son expression diffère selon l'intervalle considéré donc nous allons utiliser la relation de Chasles :

$$\int_{-3}^{4} \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{-(x-1)}{-x+1}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{-(x-1)}{x+1}\,dx + \int_{1}^{4} \frac{x-1}{x+1}\,dx = 3 + [F(x)]_0^1 - [F(x)]_1^4,$$

où F est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $[0,4]$. Pour tout $x \in [0,4]$, on a $f(x) = \dfrac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$ donc on peut considérer $F : x \longmapsto -x + 2\ln(1+x)$. Nous en déduisons que

$$\int_{-3}^{4} \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = 3 + 2F(1) - F(0) - F(4) = 5 + 4\ln(2) - 2\ln(5).$$

2) La fonction $u \longmapsto e^{-|u|}$ est continue et paire sur $[-1,1]$ donc

$$\int_{-1}^{1} e^{-|u|}\,du = 2\int_{0}^{1} e^{-|u|}\,du = 2\int_{0}^{1} e^{-u}\,du = 2(1-e^{-1}).$$

3) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}$ est continue et impaire sur $[-\pi/3, \pi/3]$ donc

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx = 0.$$

4) La fonction $y \longmapsto \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ est continue par morceaux sur $[4/e, 2e]$. Puisque $5/2 < e < 3$, on a $4/3 < 4/e < 8/5$ et donc $4/e \in]1;2[$ et $2e \in]5;6[$. La relation de Chasles entraîne que

$$\begin{aligned}
\int_{4/e}^{2e} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy &= \int_{4/e}^{2} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy + \int_{2}^{3} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy + \int_{3}^{4} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy + \int_{4}^{5} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy + \int_{5}^{2e} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy \\
&= \int_{4/e}^{2} \frac{1}{y}\,dy + \int_{2}^{3} \frac{2}{y}\,dy + \int_{3}^{4} \frac{3}{y}\,dy + \int_{4}^{5} \frac{4}{y}\,dy + \int_{5}^{2e} \frac{5}{y}\,dy \\
&= \ln(4/e) - \ln(2) + 2\ln(3) - 2\ln(2) + 3\ln(4) - 3\ln(3) + 4\ln(5) - 4\ln(4) + 5\ln(2e) - 5\ln(5) \\
&= 2\ln(2) - 1 - \ln(2) + 2\ln(3) - 2\ln(2) + 6\ln(2) - 3\ln(3) \\
&\qquad + 4\ln(5) - 8\ln(2) + 5\ln(2) + 5 - 5\ln(5) \\
&= 2\ln(2) - \ln(3) - \ln(5) + 4 = \ln\left(\frac{4}{15}\right) + 4.
\end{aligned}$$

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Correction : Supposons que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt.$

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| - f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f| - f$ est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a\,;b]$, c'est-à-dire $f = |f|$, c'est-à-dire f est positive sur $[a\,;b]$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)| + f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f| + f$ est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a\,;b]$, c'est-à-dire $f = -|f|$, c'est-à-dire f est négative sur $[a\,;b]$.

Réciproquement si f ne change pas de signe sur $[a\,;b]$, alors l'égalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$ est immédiate.

Exercice 17 (Lemme de Riemann Lebesgue). Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a\,;b]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0.$$

Correction : Faisons une IPP avec les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ et f de classe C^1 sur $[a\,;b]$. On a :

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \frac{1}{n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na) - \int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right).$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)\sin(nb)| + |f(a)\sin(na)| + \int_a^b |f'(t)\sin(nt)|\,dt\right).$$

Puisque $\sin$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\underbrace{\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right)}_{\text{ce terme ne dépend pas de } n}.$$

Par encadrement, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

Exercice 18. Soit $T > 0$. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Correction : Il s'agit de montrer que la fonction $G : a \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ est constante. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, donnons-nous une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $G(a) = F(a+T) - F(a)$. La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $G'(a) = F'(a+T) - F'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}$. En particulier

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,dt = G(a) = G(0) = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Exercice 19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. Calculer le discriminant du trinôme $\int_a^b \left(f(t) + Xg(t)\right)^2 dt$ et en déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Discuter le cas d'égalité.

Correction : Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b (f(t)+Xg(t))^2\,dt = \int_a^b (f^2(t)+X^2g^2(t)+2Xf(t)g(t))\,dt = X^2\int_a^b g^2(t)\,dt+\int_a^b f^2(t)\,dt+2X\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

L'expression $\displaystyle\int_a^b (f(t)+Xg(t))\,dt$ définit donc un trinôme du second degré. Ce trinôme ne prend que des valeurs positives par positivité de l'intégrale. Par conséquent son discriminant Δ est négatif (sinon il admettrait deux racines distinctes et changerait de signe). On a

$$0 \geqslant \Delta = \left(2\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

donc

$$4\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right) \geqslant 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2$$

et donc

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

Tout est positif donc

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Exercice 20. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, écrire $J_n = \ln(2) - I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0\leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1) Pour tous $t\in[0\,;1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $t^{n+1}\leqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{1+t+t^n}\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}\leqslant 1$. La propriété de croissance de l'intégrale entraîne que $I_n\leqslant I_{n+1}\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.

2) On a $\ln(2) = \ln(1+1)-\ln(1+0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ si bien que, par propriété de croissance de l'intégrale,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad J_n = \int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+t+t^n}\right)dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Enfin, par positivité de l'intégrale, nous obtenons que $J_n\geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) Nous en déduisons, par encadrement, que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 21. Considérons $f : x\longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x}\sqrt{1+t^4}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

2) Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $t^2\leqslant\sqrt{1+t^4}\leqslant 1+t^2$.

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Correction :

1) La fonction $g : t \longmapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(-x)$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f aussi et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2G'(x) + G'(-x) = 2g(2x) + g(-x) = 2\sqrt{1+16x^2} + \sqrt{1+x^4}.$$

2) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $t^4 \leqslant 1+t^4 \leqslant 1+t^4+2t^2 = (1+t^2)^2$. Puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de croissance de l'intégrale (car $-x \leqslant 2x$), on a

$$\int_{-x}^{2x} t^2\, dt \leqslant \int_{-x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \leqslant \int_{-x}^{2x} (1+t^2)\, dt$$

donc

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-x}^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{-x}^{2x}$$

et donc

$$3x^3 = \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2x + \frac{(2x)^3}{3} - x - \frac{(-x)^3}{3} = x + 3x^3.$$

Finalement

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{3x^3} \leqslant 1 + \frac{1}{3x^2}.$$

Par encadrement, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Exercice 23. Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\, dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

2) En déduire que f est identiquement nulle sur son domaine de définition.

Correction :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[\min(\frac{1}{x}, x), \max(\frac{1}{x}, x)]$ donc $f(x)$ est bien défini. Nous avons ainsi $D_f = \mathbb{R}^*$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = G(x) - G(\frac{1}{x})$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que f aussi. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = G'(x) + \frac{1}{x^2}G'(\frac{1}{x}) = g(x) + \frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x}) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} + \frac{(\frac{1}{x})^2-1}{x^2(1+(\frac{1}{x})^2)\sqrt{1+(\frac{1}{x})^4}} = 0.$$

On montre de même (à l'aide d'une primitive de g sur $\mathbb{R}_-^*$ que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée nulle.

2) Nous en déduisons que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas la même constante a priori attention). Par ailleurs $f(1) = 0 = f(-1)$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 24. Considérons $F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\, du$.

1) Calculer $F(0)$. A l'aide d'un encadrement, montrer que F est continue en 0.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $F(x)$ en fonction d'une intégrale dont seules les bornes dépendent éventuellement de x.

3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.

4) Montrer que F est dérivable en 0.

On pourra utiliser le fait (montré dans le TD4) que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $1 - \dfrac{y^2}{3} \leqslant \dfrac{\sin(y)}{y} \leqslant 1$.

Correction : Déjà, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u \longmapsto \dfrac{\sin(xu)}{u^{3/2}}$ est continue sur $[1,2]$ donc $F(x)$ est bien définie.

1) On a $F(0) = \displaystyle\int_1^2 0\,du = 0$.

On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$. Ainsi, pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{|xu|}{u^{3/2}} = \dfrac{x}{\sqrt{u}}$. Par propriété de majoration des intégrales et par inégalité triangulaire, on a

$$|F(x) - F(0)| = |F(x)| \leqslant \int_1^2 \left|\frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\right| du \leqslant \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{u}}\,du = x\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par encadrement, on a donc $F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$. Ainsi F est continue en 0.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Faisons le changement de variable $u = t/x$ de classe C^1 sur $[x, 2x]$ ($u = 1$ lorsque $t = x$ et $u = 2$ lorsque $t = 2x$). On a « $du = \dfrac{dt}{x}$ » et

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{(t/x)^{3/2}}\frac{dt}{x} = \sqrt{x}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt.$$

3) La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Considérons G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = \sqrt{x}(G(2x) - G(x)).$$

Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que F aussi. D'après la question 1, F est donc continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(G(2x) - G(x)) + \sqrt{x}(2G'(2x) - G'(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt + \sqrt{x}\left(\frac{2\sin(2x)}{(2x)^{3/2}} - \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\right).$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad 1 - \frac{t^2}{3} \leqslant \frac{\sin(t)}{t^{3/2}} \leqslant 1$$

donc, par propriété de majoration,

$$\int_x^{2x}\left(1 - \frac{t^2}{3}\right) dt \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt \leqslant \int_x^{2x} dt$$

donc

$$\left[t - \frac{t^3}{9}\right]_x^{2x} dt \leqslant \int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\,dt \leqslant x$$

et donc

$$2x - \frac{8x^3}{9} - x + \frac{x^3}{9} \leqslant \frac{F(x)}{\sqrt{x}} \leqslant x.$$

On en déduit que

$$\sqrt{x} - \frac{7x^{5/2}}{9} \leqslant \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leqslant \sqrt{x}.$$

Par encadrement, on a donc $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Ainsi F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

On pouvait aussi raisonner avec la forme de l'intégrale donnée dans l'énoncé.

Exercice 25. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\forall t \in [a\,;b]\,, \qquad \int_a^t f(u)\,du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du = tf(t).$$

Correction : Puisque f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$, le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection sur $[a\,;b]$ et que f^{-1} est continue sur $[a\,;b]$. Ainsi toutes les intégrales sont bien définies. Soient F et G des primitives de f et f^{-1} respectivement sur $[a\,;b]$. La fonction

$$\varphi : t \longmapsto \int_a^t f(u)\,du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du - tf(t) = F(t) - F(a) + G(f(t)) - G(0) - tf(t)$$

est dérivable sur $]a\,;b[$ et,

$$\forall t \in]a\,;b[\,, \quad \varphi'(t) = F'(t) + f'(t)G'(f(t)) - f(t) + tf'(t) = f(t) + f'(t)f^{-1}(f(t)) - f(t) + tf'(t) = 0.$$

Ainsi φ est constante sur $]a\,;b[$. Par continuité, elle est donc constante sur $[a\,;b]$. Enfin $f(a)=0$ donc $\varphi(a)=0$ et donc f est nulle sur $[a\,;b]$. D'où l'égalité.

Exercice 26. Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$,

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$,

3) $u_n = \dfrac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n^{x+1}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$,

4) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$,

5) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$,

6) $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right)$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x+1},$$
car $t \longmapsto t^x$ est continue sur $[0\,;1]$.
4) Traitée en cours.
5) Traitée en cours.
6) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Coupons en deux la somme selon la parité de k :
$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{2j-1}{2n}\right) &= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{j}{n}\right) - e^{-1/2n}\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{j}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1/(2n)}\right)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$
Puisque $\exp$ est continue sur $[0\,;1]$, alors le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{j}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 e^t\,dt = e-1.$$
Comme $e^{-1/(2n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, nous en déduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On aurait pu se passer de ce théorème en reconnaissant une somme géométrique :

$$u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(-e^{1/(2n)}\right)^k = \frac{1}{2n}\left(\frac{1-(-e^{1/(2n)})^{2n+1}}{1+e^{1/(2n)}} - 1\right) = \frac{1}{2n}\frac{e^{(2n+1)/(2n)}-e^{1/(2n)}}{1+e^{1/(2n)}} = \frac{e^{1/(2n)}}{2n}\frac{e-1}{1+e^{1/(2n)}}$$

et on en déduit encore que nous en déduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 27. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$ à l'aide d'une somme de Riemann.

Correction : Puisque $\exp$ est continue sur $[0\,;1]$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^t\,dt.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} = \frac{1}{n}\frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} = (1-e)\frac{1/n}{1-e^{1/n}}.$$

Comme $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\dfrac{1-e^{1/n}}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par unicité de la limite, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt = 1-e$.

Exercice 29. Calculer des approximations (à 10^{-6} près) de

1) $\displaystyle \ln(2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ 2) $\displaystyle \pi = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx$ 3) $\displaystyle \int_0^\pi e^{\cos(t)}\,dt$

Correction :

1) Traité en exemple de cours.
2) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0\,;1]$ donc

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi,$$

(le calcul de cette intégrale a été fait dans le cours, en exemple de changement de variables).

Pour une approximation, on ne peut pas utiliser le critère pour les fonction de classe C^1 puisque ce n'est pas le cas pour f. En revanche elle est décroissante sur $[0\,;1]$ donc l'approximation donnée plus haut (et vue en cours) assure que S_n approche π à 10^{-6} près dès que

$$n \geqslant \left\lfloor \frac{(1-0)(f(0)-f(1))}{10^{-6}} \right\rfloor + 1 = 1000001.$$

Le programme suivant affiche donc une valeur approchée de π :

```
n=1000001
S=0
for k in range(1,n+1):
    S+=(1-(k/n)**2)**(1/2)
print(S*4/n)
```

3) La fonction $f : t \longmapsto e^{\cos(t)}$ est continue sur $[0\,;1]$ donc

$$S_n = \frac{\pi}{n} e \sum_{k=1}^{n} e^{\cos(\pi k/n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^{\cos(t)}\,dt.$$

Pour une approximation, comme f est décroissante sur $[0\,;\pi]$, l'approximation donnée plus haut (et vue en cours) assure que S_n approche l'intégrale à 10^{-6} près dès que

$$n \geqslant \left\lfloor \frac{(\pi-0)(f(0)-f(\pi))}{10^{-6}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \pi(e-e^{-1})10^6 \right\rfloor + 1$$

Le programme suivant affiche donc une valeur approchée de π :

```
import numpy as np
n=int(np.pi*(np.e-1/np.e)*1000000)+1
S=0
for k in range(1,n+1):
    S+=np.exp(np.pi*k/n)
print(S*np.pi/n)
```

On aurait aussi pu exploiter le fait que f est de classe C^1 sur $[0\,;\pi]$ et que $f' : t \longmapsto -\sin(t)e^{\cos(t)}$ est bornée par e. L'approximation donnée plus haut (et vue en cours) assure que S_n approche l'intégrale à 10^{-6} près dès que

$$n \geqslant \left\lfloor \frac{(\pi-0)^2 e}{2\times 10^{-6}} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\pi^2 e 10^6}{2} \right\rfloor + 1$$

C'est moins bien (la valeur minimale de n est supérieure).

Exercice 30 (Intégrales de Wallis).

1) Écrire une fonction, appelée `Wallis`, qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ et qui renvoie une approximation de $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$ à ε près.
2) Vérifier avec plusieurs valeurs de $n \in \mathbb{N}$ que $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Correction :

1) Soient et $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $\sin^n$ étant continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a

$$S_N(n) = \frac{\pi}{2N} \sum_{k=1}^{N} \sin^n\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt = W_n$$

Puisque $\sin^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, l'approximation donnée plus haut (et vue en cours) assure que $S_N(n)$ approche W_n à ε-près dès que

$$N \geqslant \left\lfloor \frac{(\pi/2-0)(\sin^n(\pi/2)-\sin^n(0))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\pi}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

D'où la fonction Python :

```
import numpy as np
def W(n,eps):
    N=int(np.pi/(2*eps))+1
    S=0
    for k in range(1,N+1):
        S+=np.sin(np.pi*k/(2*N))**n
    return S*np.pi/(2*N)
```

2)

```
print(np.pi/2)
eps=0.001
```

```
for n in range(20):
    print((n+1)*W(n+1,eps)*W(n,eps))
```

Exercice 31 (Arctan).

1) Écrire une fonction, appelée `Arctan`, qui prend en argument $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et qui renvoie une approximation de $\mathrm{Arctan}(x)$ à ε près.

   On commencera par écrire $\mathrm{Arctan}(x)$ *sous la forme d'une intégrale dont les bornes dépendent de* x *et on utilisera la méthode des rectangles.*

2) Représenter graphiquement Arctan sur $[-5\,;5]$.

Correction :

1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant continue sur $[0\,;x]$, on a

$$S_n(x) = \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(x).$$

Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, l'approximation donnée plus haut (et vue en cours) assure que $S_n(x)$ approche $\mathrm{Arctan}(x)$ à ε-près dès que

$$n \geqslant \left\lfloor \frac{(x-0)(f(0)-f(x))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x(1-1/(1+x^2))}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{x^3}{\varepsilon(1+x^2)} \right\rfloor + 1.$$

Par imparité de Arctan, si $x \in \mathbb{R}_-$, $\arctan(x) = -\mathrm{Arctan}(-x)$ est approché par

$$-S_n(-x) = -\frac{(-x)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = S_n(x)$$

dès que $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{(-x)^3}{\varepsilon(1+(-x)^2)} \right\rfloor + 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $n \geqslant \left\lfloor \dfrac{|x|^3}{\varepsilon(1+x^2)} \right\rfloor + 1$, alors $S_n(x)$ est une approximation de $\mathrm{Arctan}(x)$ à ε-près. D'où le programme Python :

```
def Arctan(x,eps):
    n=int(abs(x)**3/(eps*(1+x**2)))+1
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S+=1/(1+(k/n)**2)
    return S*x/n
```

2)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(-5,5,1000)
Y=[Arctan(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```