Correction de quelques exercices de la feuille de TD 15

I Dérivabilité, calculs de dérivées et utilisation de la dérivée

Exercice 1. (★ à ★★) Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dériver.

1) $x \mapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2}$,
2) $x \mapsto \ln(x^4-3x^2+2)$,
3) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[6]{1+x^4}}$,
4) $x \mapsto \ln(x)e^{x^2}$,
5) $x \mapsto \dfrac{5x^3-4x^2+3x+1}{2023x^6+x^3+1}$,
6) $x \mapsto x^{2023}-2023^x$,
7) $x \mapsto (1+x^2)e^{\mathrm{Arctan}(x)}$,
8) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Arctan}(x)}}$,
9) $x \mapsto \cos(\sin^2(x))$,
10) $x \mapsto \ln\left(1+\cos(\pi x^2)\right)$,
11) $x \mapsto \dfrac{8^x}{x^8}$,
12) $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$,
13) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,
14) $x \mapsto \ln(\cos(x)-1)$,
15) $x \mapsto \dfrac{\ln(2+\cos(x))}{\exp(\tan(x))}$,
16) $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(x^7-\dfrac{3}{x^5}\right)$,
17) $x \mapsto \sqrt[5]{x}e^{\sin(\ln(x))}$,
18) $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{Arctan}(\mathrm{Arctan}(x)))$,
19) $x \mapsto (\cos(x))^{\sin(x)}$,
20) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,
21) $x \mapsto \sin(x)\cos(x)\tan(x)\,\mathrm{Arctan}(x)$.

Correction :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2} = -(4x^2-1)^{-2}$ est définie et dérivable sur $\{x\in\mathbb{R}\,|\,4x^2-1\neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1/2,1/2\}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1/2,1/2\}$,

$$f'(x) = -(-2)(8x)(4x^2-1)^{-2-1} = \frac{16x}{(4x^2-1)^3}.$$

2) Pour tout $y\in\mathbb{R}$, $y^2-3y+2=(y-1)(y-2)$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$x^4-3x^2+2 = (x^2-1)(x^2-2) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$$

si et seulement si $x>\sqrt{2}$, $x<-\sqrt{2}$ ou $-1<x<1$. Ainsi la fonction $f : x\mapsto \ln(x^4-3x^2+2)$ est continue et dérivable sur $D_f =]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]-1\,;1[\cup]\sqrt{2},+\infty[$. Pour tout $x\in D_f$,

$$f'(x) = \frac{4x^3-6x}{x^4-3x^2+2}.$$

3) $f : x \longmapsto (1+x^4)^{1/6}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{6}\,4x^3\,(1+x^4)^{-5/6} = \frac{2x^3}{3(1+x^4)^{5/6}}.$$

4) $f : x \longmapsto \ln(x)e^{x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}}{x} + 2x\ln(x)e^{x^2}.$$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{5x^3-4x^2+3x+1}{x^6+x^3+1}$ est définie et dérivable $\mathbb{R}$ (car $x^6+x^3+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$). Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(15x^2-8x+3)(x^6+x^3+1)-(5x^3-4x^2+3x+1)(6x^5+3x^2)}{(x^6+x^3+1)^2} \\ &= \frac{3-8x+12x^2-6x^3+4x^4-6x^5-15x^6+16x^7-15x^8}{(x^6+x^3+1)^2} \end{aligned}$$

6) Puisque $2021>1$, $f : x \longmapsto x^{2021}-2021^x$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = 2021x^{2018} - \ln(2021)\,2021^x.$$

7) Traitée en cours.

8) Traitée en cours.

9) $f : x \longmapsto \cos(\sin^2(x))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)\sin(\sin^2(x)).$$

10) $f : x \longmapsto \ln\big(1+\cos(\pi x^2)\big)$ est définie et dérivable sur

$\{x\in\mathbb{R}\,|\,1+\cos(\pi x^2)>0\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,\cos(\pi x^2)>-1\} = \mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R}\,|\,\pi x^2\equiv\pi\,[2\pi]\} = \mathbb{R}\backslash\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2\equiv 1\,[2]\}$

autrement dit sur l'ensemble des réels dont le carré n'est pas un entier impair. Pour tout $x\in D_f$,

$$f'(x) = \frac{\pi 2x(-\sin(\pi x^2))}{1+\cos(\pi x^2)}.$$

11) $f : x \longmapsto \dfrac{8^x}{x^8}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{\ln(8)8^x x^8 - 8x^7 8^x}{x^{16}} = \frac{8^x}{x^9}(\ln(8)x-8)$$

12) $f : x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ est définie sur $[-1,+\infty[$ et $f = g\circ g\circ g$ avec $g : x\longmapsto \sqrt{1+x}$.

La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Ainsi la fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$f' = (g\circ g)'\times(g'\circ g\circ g) = (g\circ g)'\times(g'\circ g\circ g) = g'\times(g'\circ g)\times(g'\circ g\circ g).$$

Ainsi, pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{8}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}.$$

13) $f : x \longmapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$ est définie sur

$$\{x\in\mathbb{R}\backslash(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\,|\,\tan(x)\geqslant 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\Big[.$$

Elle est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big]k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\Big[$, puisque la fonction racine sixième est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout x dans cette union,

$$f'(x) = (1+\tan^2(x))\,\frac{1}{6}(\tan(x))^{1/6-1} = \frac{1+\tan^2(x)}{6(\tan(x))^{5/6}}.$$

14) $f : x \longmapsto \ln(\cos(x) - 1)$ n'est pas définie puisque $\cos(x) - 1 \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

15) Traitée en cours.

16) Traitée en cours.

17) Traitée en cours.

18) Traitée en cours.

19) $f : x \longmapsto (\cos(x))^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$ est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[.$$

Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \left(\cos(x)\ln(\cos(x)) + \sin(x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right) e^{\sin(x)\ln(\cos(x))} = \left(\cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)(\cos(x))^{\sin(x)}.$$

20) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(x) + 2 \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)(\sin(x)+2)^4 - \cos(x)\cdot 4\cos(x)(\sin(x)+2)^3}{(\sin(x)+2)^8} \\ &= \frac{-\sin(x)(\sin(x)+2) - 4\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^5} = -\frac{\sin(x)(\sin(x)+2)4\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^5}. \end{aligned}$$

21) Traitée en cours.

Exercice 2. Donner le domaine de définition des fonctions suivants et les prolonger éventuellement par continuité. Préciser ensuite les intervalles sur lesquels elles sont dérivables et calculer leurs dérivées (préciser s'il y a des dérivées à gauche ou à droite). Sont-elles de classe C^1 ?

1) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,

2) $x \mapsto x\ln(x) - x$,

3) $x \mapsto \sqrt{x^3 - x^2}$,

4) $x \mapsto 7xe^{-1/\sqrt{x}}$,

5) $x \mapsto \sqrt[4]{x}\dfrac{\sqrt{x}}{x^{7/4}}$,

6) $x \mapsto x^{1/\ln(x)}$,

7) $x \mapsto x^x$,

8) $x \mapsto (x^8)^{x^3}$,

9) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$,

10) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt[9]{\sin^4(x^5)}}$,

11) $x \mapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|}$,

12) $x \mapsto 1 - \cos(\sqrt{|x-2|})$.

Pour la question 12, on pourra utiliser la limite $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$, *montrée dans l'exercice 20.*

Correction :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ pour les mêmes raisons. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

et, si $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Si $x > 0$, alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

Si $x < 0$, alors $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$.

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. On a aussi $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1 = f'(0)$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 = f'(0)$ donc f est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) $f : x \longmapsto x\ln(x) - x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   Ensuite f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x)$. On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.

3) Traitée en cours.
4) Traitée en cours.
5) Traitée en cours.
6) Le terme $x^{1/\ln(x)} = e^{\ln(x)/\ln(x)}$ est définie si et seulement si $\ln(x)$ existe et $\ln(x) \neq 1$ si et seulement si $x \in]0\,;1[\cup]1,+\infty[$. Ainsi $f : x \longmapsto x^{1/\ln(x)}$ est définie sur $]0\,;1[\cup]1,+\infty[$. Si $x \in]0\,;1[\cup]1,+\infty[$, alors $f(x) = e^1 = e$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 et en 1 en posant $f(0) = f(1) = f(e)$. Ainsi prolongée f est la fonction constante égale à e sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est nulle.

7) $f : x \longmapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées. Il s'ensuit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1$ (par continuité de $\exp$ en 0). On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x\ln(x)}.$$
   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} = \ln(x)\,\frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)}.$$
   Comme $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $\dfrac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0^+]{} e^0 = 1$, on a $\dfrac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et donc f n'est pas dérivable en 0.

8) Traitée en cours.
9) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 1 \geqslant 1$ donc $\sqrt{x^4+1}$ existe et est supérieur ou égal à 1. De plus $-1 + \sqrt{x^4+1}$ est nulle si et seulement si $x = 0$. On en déduit que $fx :\longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (et même de classe C^1) sur $\mathbb{R}^*$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{1}{3}\,\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\left(-1+\sqrt{x^4+1}\right)^{1/3-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,\frac{1}{(-1+\sqrt{x^4+1})^{2/3}}.$$
   Ensuite, si $x > 0$,
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2x^3}} = \sqrt[3]{\frac{x^4+1-1}{2x^3(1+\sqrt{x^4+1})}} = \sqrt[3]{\frac{x}{2}(1+\sqrt{x^4+1})} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$
   Si $x < 0$, alors
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{x^4+1}}{-2x^3}} = -\sqrt[3]{\frac{-x}{2}(1+\sqrt{x^4+1})} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0.$$
   Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

   Enfin
$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\left(\frac{1+\sqrt{x^4+1}}{x^4}\right)^{2/3} &= \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\left(\frac{1+\sqrt{x^4+1}}{x^4}\right)^{2/3} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^{3-8/3}}{\sqrt{x^4+1}}\left(1+\sqrt{x^4+1}\right)^{2/3} \end{aligned}$$
   donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f'(0)$. Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

10) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt[9]{\sin^4(x^5)}}$ est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(x^5) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^5 \notin \pi\mathbb{Z}\}.$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}^*$ est tel que $x^5 \in \pi\mathbb{Z}$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$.

Si $x \in D_f$, alors $(f(x))^9 = \dfrac{x^9}{\sin^4(x^5)} = \dfrac{x^9}{x^{20}} \left(\dfrac{x^5}{\sin(x^5)}\right)^4 \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$. car $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.

Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{\sin^4(x^5)}} + x\frac{-1}{9}\, 4(-5x^4 \cos(x^5)) \sin^3(x^5)\, (\sin^4(x^5))^{-1/9-1}.$$

11) La fonction $f : x \longmapsto \sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \dfrac{1 - \cos(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}$.

D'après l'indication, $\dfrac{1-\cos(u)}{u^2} \xrightarrow[u \to 0]{} \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1-\cos(u)}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$. Ainsi $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Par théorème de prolongement, f est dérivable en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier), $f'(0) = 0$ et f' est continue en 0. Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

12) $f : x \longmapsto 1 - \cos(\sqrt{|x-2|})$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et

$$\forall x \in \,]-\infty, 2[, \qquad f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{2-x})}{2\sqrt{2-x}}.$$

$$\forall x \in \,]2, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{\sin(\sqrt{x-2})}{2\sqrt{x-2}}.$$

Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1 - \cos(\sqrt{|x-2|})}{x-2}.$$

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta)$. Ainsi

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{2\sin^2(\sqrt{|x-2|}/2)}{x-2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2(\sqrt{|x-2|}/2)}{(x-2)/4}.$$

Puisque $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$, on a

- Si $x > 2$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{x-2}/2)}{\sqrt{x-2}/2}\right)^2 \xrightarrow[x \to 2^+]{} \frac{1}{2}$$

- Si $x < 2$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{2-x}/2)}{\sqrt{2-x}/2}\right)^2 \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\frac{1}{2}$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur intervalle de définition et déterminer leur dérivée. Sont-elles de classes C^1 ?

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : x \in \,]-1\,;1[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

On pourra évaluer la fonction g en les points $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$ et $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

- *Étude de f.*
  - Une petite étude de fonction montre que la fonction $x \longmapsto x - \ln(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous en déduisons que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient de deux fonctions de classe C^1 avec la fonction dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Bien entendu h est aussi définie et de classe C^1 (et de dérivée nulle) sur $\mathbb{R}_-$.
  - Il est immédiat que f est continue à gauche en 0. Ensuite, pour tout $x > 0$,
  $$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{-1} = -1 = f(0),$$
  puisque $\frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi f est continue en 0.
  - Pour tout $x < 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $x > 0$,
  $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\frac{\ln(x) + x - \ln(x)}{x - \ln(x)} = \frac{1}{x-\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$
  Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
  - Pour tout $x < 0$, $f'(x) = 0 \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$. Pour tout $x > 0$,
  $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(x)}\frac{\frac{1}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)^2}.$$
  Par croissances comparées, $\frac{x}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $h'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$. Ainsi f' est continue en 0. Finalement h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Traitée en cours

Exercice 5. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Soit $x_0 \in I$ n'étant pas une extrémité de I. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h}.$$

Correction :
- $\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h} = \alpha \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \alpha f'(x_0)$.
- $$\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h} = \frac{f(x_0+\alpha h) - f(h)}{h} - \frac{f(x_0+\beta h) - f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \alpha f'(x_0) - \beta f'(x_0) = (\alpha-\beta) f'(x_0)$$

Exercice 6. Montrer que les courbes représentatives des fonctions carré et inverse admettent une unique tangente commune que l'on précisera.

Correction : Notons f la fonction carré et g la fonction inverse.

- Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, la tangente en x_0 à $\mathscr{C}_f$ est la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2xx_0 - x_0^2.$$

- Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^*$, la tangente en 0 à $\mathscr{C}_g$ est la droite d'équation

$$y = g'(y_0)(x - y_0) + g(y_0) = \frac{-1}{y_0^2}(x - y_0) + \frac{1}{y_0} = -\frac{x}{y_0^2} + \frac{2}{y_0}.$$

Ces deux tangentes coïncident si et seulement si $2x_0 = \dfrac{-1}{y_0^2}$ et $-x_0^2 = \dfrac{2}{y_0}$ si et seulement si $x_0 = \dfrac{-1}{2y_0^2}$ et $-\left(\dfrac{-1}{2y_0^2}\right)^2 = \dfrac{2}{y_0}$ si et seulement si $x_0 = \dfrac{-1}{2y_0^2}$ et $\dfrac{-1}{4y_0^4} = \dfrac{2}{y_0}$ si et seulement si $y_0 = \dfrac{-1}{2}$ et $x_0 = -2$. La tangente en question est alors la droite d'équation $y = -4x - 4$.

Exercice 7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Correction :

- Si f est dérivable et paire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x)$. Ainsi f' est impaire.
- Si f est dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = +f'(-x)$. Ainsi f' est paire.
- Si f est dérivable et T-périodique (avec $T > 0$) sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x+T) = f'(x+T)$. Ainsi f est T-périodique.

Exercice 9. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Correction : Déjà $1 + x + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Considérons

$$\varphi : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) - \operatorname{Arctan}(1+x) + \operatorname{Arctan}(x).$$

Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2}}{1 + \left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)^2} - \frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2+1} - \frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Or

$$-\frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1-x^2+1+1+2x+x^2}{(1+x^2)(2+2x+x^2)} = \frac{2x+1}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4} = \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^2+1}.$$

Ainsi φ est constante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\varphi(0) = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(0) = 0$, il s'ensuit que la fonction φ est nulle sur $\mathbb{R}$.
On a donc une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k+1)\right) = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0).$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10. Dans l'exercice 13 de la feuille d'exercices 12, nous avons introduit les fonctions Arccos et Arcsin (les bijections de $\cos : [0\,;\pi] \to [-1\,;1]$ et $\sin : [-\pi/2\,;\pi/2] \to [-1\,;1]$ respectivement). Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1\,;1]$ et calculer leurs dérivées.

Correction :

- La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x \in \,]0,\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. Par conséquent Arccos est dérivable sur $f(]0,\pi[) = \,]-1\,;1[$ et
$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sin(\text{Arccos}(x))}.$$
Or, si $y \in \,]0,\pi[$, $\sin(y) > 0$ et donc $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$. Nous en déduisons que
$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\pi/2,\pi/2]$ et, pour tout $x \in \,]-\pi/2,\pi/2[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Par conséquent Arcsin est dérivable sur $f(]-\pi/2,\pi/2[) = \,]-1\,;1[$ et
$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}.$$
Or, si $y \in \,]-\pi/2,\pi/2[$, $\cos(y) > 0$ et donc $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$. Nous en déduisons que
$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 12. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : *Nous avons traité cette question dans le cours avec 1 au lieu de $1/2$ en utilisant l'IAF. Faisons autrement (c'est faussement autrement puisque les résultats utilisées ci-dessous sont des conséquences du TAF).*

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement positive si bien qu'elle est strictement croissante. Le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Reste à montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Introduisons pour cela la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant 0$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

- Si $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \geqslant g(0) + x$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $x \leqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \leqslant g(0) + x$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Nous en déduisons que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 15. Une fonction est dite Lipschitzienne sur I si elle est k-Lipschitzienne sur I pour un certain $k \in \mathbb{R}_+^*$ (cf. exercice 8 de la feuille d'exercices n° 12).

1) Existe-il des fonctions Lipschitzienne qui ne sont pas dérivables ?
2) Soit f une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Montrer que f' est bornée.
3) Montrer que, si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur I, alors f est Lipschitzienne sur I.

Correction :

1) L'inégalité triangulaire inversée entraîne que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+, \qquad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$
Cela signifie que la fonction valeur absolue est 1-Lipschitzienne sur $I = \mathbb{R}_+$. Elle n'est pourtant pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

2) Supposons que f est une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Soit $x_0 \in I$. On a

$$\forall x \in I \backslash \{x_0\}, \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant k.$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient $f'(x_0) \leqslant k$. Nous en déduisons que f' est bornée sur I (par k).

3) Supposons que f est une fonction dérivable sur I et que f' est bornée sur I (par un certain réel $M > 0$). L'inégalité des accroissement finis entraîne alors que

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\, |x - y|.$$

Ainsi f est M-Lipschitzienne sur I.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Supposons qu'il existe $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$. Montrer que $L = 0$.

Correction : Supposons que $L \neq 0$. Il existe alors $c > 0$ et $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $|f'(x)| \geqslant c$ (avec $c = 1$ si $|L| = +\infty$ et $c = |L|/2$ si $|L| \in \mathbb{R}$). Le TAF entraîne qu'il existe $c \in]A, x[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(A)}{x - A}$ et donc $\left| \dfrac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| \geqslant c$. On a donc $c(x - A) \leqslant |f(x) - f(A)| \leqslant 2M$ (où $M = \sup |f|$). En faisant tendre x vers $+\infty$, on aboutit à une contradiction.

Exercice 18. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.

2) En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, le théorème des accroissements finis entraîne qu'il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c_x)x$. Puisque $0 < c_x < x$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(c_x) \leqslant f'(x)$. Ainsi $f(x) = f(x) - f(0) \leqslant f'(x)x$. D'où l'inégalité annoncée puisque $x > 0$.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x} \right) \geqslant 0,$$

d'après ce qui précède. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 20 (Théorème des accroissements finis généralisés et règle de L'Hôpital).
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,; b]$ et dérivables sur $]a\,; b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a\,; b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a\,; b]$.

2) Montrer qu'il existe $c \in]a\,; b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

   On appliquera le théorème de Rolle à la fonction $x \longmapsto f(x) - \alpha g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.

3) Règle de L'Hôpital : on suppose que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ à droite en a. Montrer que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

4) Application : montrer que

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-\sin(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}.$$

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a\,;a+\delta[$, $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in]a\,;a+\delta[$. En appliquant le TAF généralisé avec x à la place de b, on obtient qu'il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Comme $a < c < x < a+\delta$ pour tout $x \in]a\,;b[$, on obtient $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$

4) • On applique la règle de l'Hôpital avec $a = 0$, $f = \sin$ et $g : x \longmapsto x$. Comme $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\cos(x)}{1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

• On applique la règle de l'Hôpital avec $a = 0$, $f = 1-\cos$ et $g : x \longmapsto x^2$. Comme $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin(x)}{2x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

• On applique la règle de l'Hôpital avec $a = 0$, $f : x \longmapsto x-\sin(x)$ et $g : x \longmapsto x^3$. Comme $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1-\cos(x)}{3x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$, $\dfrac{x-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{6}$.

Exercice 21. Considérons la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^*$.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$.
   b) Montrer que g' est bornée sur $]1\,;+\infty[$ par un réel $M \in]0\,;1[$.
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant M|x_n - \sqrt{2}|$.
   d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant M^{n-1}|x_1 - \sqrt{2}|$ et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

3) Écrire des instructions en Python qui calculent une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près.

Correction :

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g(x) = x \quad\Longleftarrow\quad x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{2} \quad\Longleftarrow\quad \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \quad\Longleftarrow\quad x^2 = 2 \quad\Longleftarrow\quad x = \sqrt{2}.$$

Ainsi $\sqrt{2}$ est l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^*$.

2) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2(x^2-1)}{3x^2}$. On en déduit le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	
g	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$4/3$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi g est minorée par $4/3$ et donc strictement par 1. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = g(x_{n-1}) > 1$.

b) Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$,

$$|g'(x)| = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leqslant \frac{2}{3} = M.$$

c) La fonction g est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et g' est bornée par $2/3$ donc l'IAF assure que, pour tout $(a,b) \in]1\,;+\infty[^2$,

$$|g(a) - g(b)| \leqslant \frac{2}{3}|a-b|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $a = x_n$ et $b = \sqrt{2}$, on obtient $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{2}{3}|x_n - \sqrt{2}|$.

d) Par récurrence immédiate (*mais à rédiger totalement en DS/concours*),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |x_1 - \sqrt{2}|$$

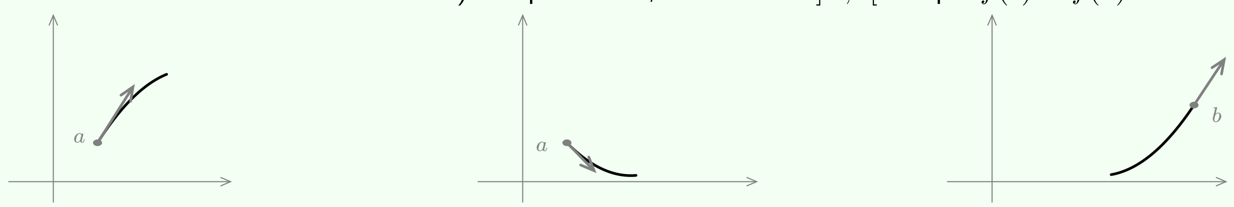
Puisque $\dfrac{2}{3} \in]0\,;1[$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$.

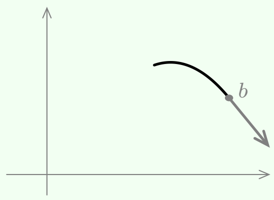
3) Prenons $x_1 = 1$ afin que $|x_1 - \sqrt{2}| \leqslant 1$. On a alors $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Il suffit donc que n soit tel que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \leqslant 10^{-8}$ pour que x_n soit une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près. Ceci est équivalent (en passant à la fonction $\ln$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et en divisant par $\ln(2/3) < 0$) à $n - 1 \geqslant \dfrac{-8\ln(10)}{\ln(2/3)}$. On prend donc x_n avec $n = \left\lfloor \dfrac{-8\ln(10)}{\ln(2/3)} + 1 \right\rfloor + 1$. D'où le programme qui renvoie une approximation à 10^{-8} près :

```
n=int(-8*np.log(10)/np.log(2/3))+2
x=1
for k in range(n):
    x=2*(x+1/x)/3
print(x)
```

Exercice 24 (Le théorème de Darboux). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,;b]$.

1) a) On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $c \in]a\,;a+\eta]$, $f(c) > f(a)$ (on s'intéressera au taux d'accroissement). En particulier, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f(c) > f(a)$.





b) Donner un résultat analogue si $f'(a) < 0$, si $f'(b) > 0$ ou si $f'(b) < 0$.

2) a) On suppose dans cette question et la suivante que $f'(a) > 0 > f'(b)$ (raisonnement analogue si $f'(a) < 0 < f'(b)$). Montrer que si f est C^1, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

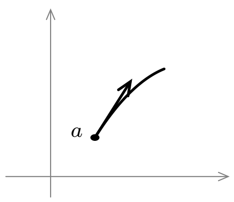
b) On suppose à présent uniquement que f est dérivable. Montrer, en utilisant la question 1, que le résultat de la question précédente est encore vérifié.

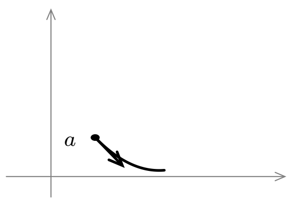
c) On ne suppose plus que $f'(a) > 0 > f'(b)$. Montrer que pour tout $m \in [f'(a)\,; f'(b)]$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f'(c) = m$. Ce résultat s'appelle le *théorème de Darboux*. Il dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue !

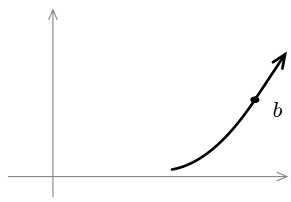
Correction :

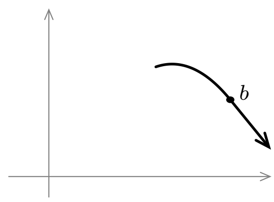
1) a) Il suffit de voir que, puisque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) > 0$ alors il existe un voisinage $]a\,;a+\eta]$ de a (où $\eta > 0$) tel que, pour tout $x \in]a\,;a+\eta]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Or, si $x \in]a\,;a+\eta]$, $x - a > 0$ ce qui permet de conclure. C'est le premier dessin ci-dessous.

b) De même, si $f'(a) < 0$, alors il existe $c > a$ tel que $f(c) < f(a)$ (deuxième dessin), si $f'(b) > 0$, il existe $c < b$ tel que $f(c) < f(b)$ (troisième dessin), tandis que si $f'(b) < 0$, alors il existe $c < b$ tel que $f(c) > f(b)$ (quatrième dessin). Attention, on ne peut rien affirmer sur la monotonie éventuelle de f (même si les dessins laissent penser le contraire, nous renvoyons encore au paragraphe I.4.c).









2) a) Comme f est C^1, f' est continue et le TVI permet de conclure.

b) Comme f' n'est plus supposée continue, on ne peut plus conclure aussi facilement. D'après la question 1, il existe $c_1 > a$ tel que $f(c_1) > f(a)$, et il existe $c_2 < b$ tel que $f(c_2) > f(b)$ (on combine le premier et le dernier dessins de la question 1.b). Or, f est continue car dérivable sur le segment $[a\,;b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne supérieure en un réel c. Or, d'après les inégalités précédentes, le sup n'est atteint ni en a ni en b, c'est-à-dire que c est un point intérieur. D'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $f'(c) = 0$.

c) Soit $m \in [f'(a)\,; f'(b)]$. Si $m = f'(a)$ (respectivement $f'(b)$) alors $c = a$ (respectivement $c = b$) convient. Supposons à présent $m \in]f'(a)\,; f'(b)[$. Il suffit d'appliquer la question précédente à $g : x \longmapsto f(x) - mx$. En effet, g est dérivable, de dérivée $g' : x \longmapsto f'(x) - m$ et, par hypothèse, $g'(a)$ et $g'(b)$ sont de signe contraire, donc g' s'annule : il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = m$.