Correction de quelques exercices de la feuille de TD 14

Exercice 2. A l'aide de l'algorithme de dichotomie et de Python, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près.

Correction : Fait en exemple de cours.

Exercice 6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que toute application continue $f : [a\,;b] \longrightarrow [a\,;b]$ admet un point fixe.

Correction : Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$. La fonction g est continue et $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. On a $0 \in [f(b); f(a)]$ donc le TVI entraîne qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$.

Exercice 9.

1) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes.
2) A l'aide d'un raisonnement par dichotomie « à la main », déterminer un encadrement de longueur au plus 10^{-1} de la plus petite des trois solutions.
3) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée ε et qui renvoie un encadrement à ε près de chacune des trois solutions.

Correction :

1) Notons $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f' : x \longmapsto 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Ainsi f' est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$, strictement décroissante sur $[-1\,;1]$, et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   Remarquons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$. Ainsi, le corollaire du TVI assure que f s'annule trois fois :

   - une fois entre $-\infty$ et -1. Puisque $f(-2) = -1 < 0$, la plus petite racine est entre -2 et -1.
   - une fois entre -1 et 1.
   - une fois entre 1 et $+\infty$. Puisque $f(2) = 3 > 0$, la plus grande racine est entre 1 et 2.

2) Procédons par dichotomie pour donner une valeur approchée de la plus petite racine à 10^{-1} près. On pose $a_0 = -2$ et $b_0 = -1$.

   - On calcule que $f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right) = \dfrac{17}{8} > 0$ donc on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = -\dfrac{3}{2}$. On a $|b_1 - a_1| > 10^{-1}$.
   - On calcule que $f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) = \dfrac{57}{64} > 0$ donc on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = -\dfrac{7}{4}$. On a $|b_2 - a_2| > 10^{-1}$.
   - On calcule que $f\left(\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right) > 0$ donc on pose $a_3 = a_2$ et $b_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = -\dfrac{15}{8}$. On a $|b_3 - a_3| > 10^{-1}$.
   - On calcule que $f\left(\dfrac{a_3 + b_3}{2}\right) < 0$ donc on pose $a_4 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = -\dfrac{31}{16}$ et $b_4 = b_3$. On a $|b_4 - a_4| \leqslant 10^{-1}$.

   Ainsi un encadrement de longueur 10^{-1} de s est $\left[-\dfrac{31}{16}; -\dfrac{15}{8}\right]$.

3)

```python
def Approx_racines(eps):
    L=[]
    #Racine entre -2 et -1
    a=-2; b=-1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if c**3-3*c+1>0:#Comme f(a)<0 et f(c)>0
            b=c#On continue avec "la partie de gauche"
        else:
            a=c
    L.append([a,b])
    #Racine entre -1 et 1
    a=-1; b=1
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if c**3-3*c+1>0:#Comme f(a)>0 et f(c)>0
            a=c#On continue avec "la partie de droite"
        else:
            b=c
    L.append([a,b])
    #Racine entre 1 et 2
    a=1; b=2
    while b-a>eps:
        c=(a+b)/2
        if c**3-3*c+1>0:#Comme f(a)<0 et f(c)>0
            b=c#On continue avec "la partie de gauche"
        else:
            a=c
    L.append([a,b])
    return L
```

Si on exécute `Approx_racines(0.0001)`, on obtient

```
[[-1.87939,-1.87933],[0.34729,0.34735], [1.53204,1.532104]]
```

Exercice 10. Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application k-Lipschitzienne, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1) Montrer que f est continue sur I.
2) Supposons que $k \in]0\,;1[$, que I est un segment et que $f(I) \subset I$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   a) Montrer que f admet un unique point fixe $\ell \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|$.
   c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   d) Déterminer une valeur de n pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) a) Traitée en cours.
   b) Procédons par récurrence.
      - On a $|x_0 - \ell| \leqslant k^0 |x_0 - \ell|$.
      - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|x_n - \ell| \leqslant k^n |x_0 - \ell|$. On a alors

$$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leqslant k\, n |x_n - \ell| \leqslant k\, k^n |x_0 - \ell| = k^{n+1}|x_0 - \ell|.$$

      Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'où le résultat par récurrence.

c) Puisque $k \in]0\,;1[$, $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, par encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

d) Choisissons x_0 suffisamment proche de ℓ pour que $|x_0 - \ell| < 1$. Il suffit de choisir n tel que $k^n \leqslant 10^{-3}$. C'est le cas si et seulement si $n\ln(k) \leqslant -3\ln(10)$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(k)}$. On prend donc $n = \left\lfloor \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(k)} \right\rfloor$.

Exercice 11 (D'après l'oral de l'ESCP). Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $g_u : x \in [-1\,;1] \longrightarrow ux - f(x)$.

1) Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que g_u admet un maximum $M(u)$. On note E_u l'ensemble des réels de $[-1\,;1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2) Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et soient $x \in E_u$ et $y \in E_v$. Montrer que $M(u)-M(v) \leqslant (u-v)x$ et que $M(v)-M(u) \leqslant (v-u)y$. En déduire que $|M(v)-M(u)| \leqslant |u-v|$.
3) Montrer que la fonction $M : u \in \mathbb{R} \longmapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1) Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction g_u est continue sur le segment $[-1\,;1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi elle admet un maximum $M(u)$.
   On note E_u l'ensemble des réels de $[-1\,;1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2) On a donc $M(u) = g_u(x) = ux - f(x)$ et $M(v) = g_v(y) = vy - f(y)$. De plus
   - $vx - f(x) = g_v(x) \leqslant M(v)$ donc $M(u) - M(v) \leqslant ux - f(x) - vx + f(x) = (u-v)x$.
   - $yu - f(y) = g_u(y) \leqslant M(u)$. Ainsi $M(v) - M(u) \leqslant yv - f(y) - yu + f(y) = (v-u)y$.

   On a donc $(u-v)y \leqslant M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x$ et donc $|M(v)-M(u)| \leqslant |u-v|$, puisque $(x,y) \in [-1\,;1]^2$.
3) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta = \varepsilon$. Pour tout $u \in \mathbb{R} \cap [u_0-\delta, u_0+\delta]$, on a $|u-u_0| \leqslant \delta = \varepsilon$ et donc $|M(v)-M(u)| \leqslant |u-v| \leqslant \varepsilon$. Ainsi M est continue en u_0.

Exercice 12. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a\,;b]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) > m$.

Correction : La fonction f est continue sur $[a\,;b]$ donc est minorée et son minimum est atteint en un point $x_0 \in [a\,;b]$. Posons $m = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. On a

$$\forall x \in [a\,;b]\,, \qquad f(x) \geqslant f(x_0) > m.$$

Exercice 13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

1) Montrer que, si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.
2) Étudions une réciproque partielle. Supposons que f est injective et continue sur I. Fixons $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. Puisque f est injective sur I, on a $f(a) \neq f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement croissante sur I.
   a) Justifier alors l'existence de $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$.
   b) Montrer brièvement que, pour tous $(u,v) \in I^2$ et $t \in [0\,;1]$, $u + t(v-u)$ est compris entre u et v.
   c) Considérons alors la fonction $\varphi : t \in [0\,;1] \longmapsto f(b + t(y-b)) - f(a + t(x-a))$. Montrer qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(c) = 0$.
   d) En déduire que $(1-c)(b-a) = -c(y-x)$ et aboutir à une absurdité.

   Ainsi f est strictement croissante sur I. Si $f(a) > f(b)$, alors le raisonnement précédent (appliqué à $-f$) entraîne que f est strictement décroissante sur I. Cela montre qu'une fonction injective et continue sur I est strictement monotone sur I.

3) Donner un exemple de fonction (nécessairement discontinue) injective sur $[0\,;1]$ et qui n'est pas strictement monotone sur $[0\,;1]$. Un dessin suffira mais une expression explicite, sans démonstration, sera valorisée.

Correction :

1) Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $x \neq y$. On a alors $x < y$ ou bien $x > y$. Si f est strictement croissante (resp. décroissante), nous obtenons $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$). Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$. Ainsi f est injective sur I.

2) a) Puisque f n'est pas strictement croissante, la phrase

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(y) - f(x) > 0\big)$$

est fausse et donc il existe $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $f(y) - f(x) \leqslant 0$.

b) Soient $(u,v) \in I^2$ et $t \in [0\,;1]$.

- Si $u < v$, alors $0 \leqslant t(v-u) \leqslant v-u$ et donc $u \leqslant u + t(v-u) \leqslant u + (v-u) = v$.
- Si $u \geqslant v$, alors $v - u \leqslant t(v-u) \leqslant 0$ et donc $v \leqslant u + t(v-u) \leqslant u$.

Ainsi $u + t(v-u)$ est compris entre u et v.

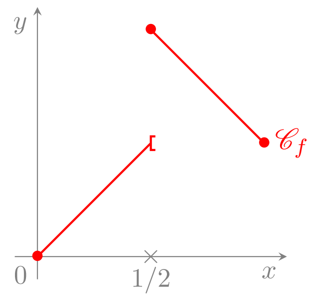
c) Puisque I est un intervalle contenant a, b, x et y, il s'ensuit que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $a + t(x-a)$, $b + t(b-y) \in I$. Ainsi φ est définie et sur $[0\,;1]$. Puisque $t \longmapsto a + t(x-a)$ et $t \longmapsto b + t(b-y)$ sont continues sur $[0\,;1]$ et f est continue sur I, la fonction φ est continue sur $[0\,;1]$. De plus

$$\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = f(y) - f(x) \leqslant 0.$$

Ainsi $0 \in [\varphi(1); \varphi(0)]$ et le TVI entraîne que il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(c) = 0$.

d) On a donc $f(b + c(y-b)) = f(a + c(x-a))$ et, comme f est injective, nous en déduisons que $b + c(y-b) = a + c(x-a)$ et donc $(1-c)(b-a) = -c(y-x)$. C'est absurde car $(1-c)(b-a) \geqslant 0$, $-c(y-x) \leqslant 0$ et ils ne peuvent pas être tous les deux nuls.

3) Par exemple $f : x \in [0\,;1] \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0\,;1/2[\\ \dfrac{3}{2} - x & \text{si} \quad x \in [1/2\,;1]\,. \end{cases}$ est injective mais pas strictement monotone sur $[0\,;1]$.



Exercice 14. Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) et expliciter f^{-1} sur J.

$$1)\ f : x \mapsto \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}, \quad 2)\ f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}, \quad 3)\ f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 4)\ f : x \mapsto \ln(x^{3/4} - 1).$$

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x \dfrac{1 + e^{-2x}}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) = e^{-x} \dfrac{1 + e^{2x}}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Une brève étude de fonction montre que f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$). Ainsi le théorème de la bijection entraîne que :

- f réalise une de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = [f(0)\,; \lim_{+\infty} f[= [1\,; +\infty[$.

- f réalise une de $\mathbb{R}_-$ sur $f(\mathbb{R}_-) = [f(0) ; \lim_{-\infty} f[= [1 ; +\infty[$.

Explicitons la réciproque de $f\Big|_{\mathbb{R}_-}$. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1 ; +\infty[$, on a

$$y = f(x) \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \iff z^2 - 2yz + 1 = 0 \text{ et } z = e^x.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_y = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$ car $y \geqslant 1$. Puisque $x \leqslant 0$, on en déduit que $y = f(x)$ si et seulement si $e^x = \dfrac{2y + \sqrt{\Delta_y}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1}$ (l'autre racine est positive).

La réciproque de f sur $f\Big|_{\mathbb{R}_-}$ est donc $y \in [1 ; +\infty[+ \longmapsto \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$.

De même on trouve que la réciproque de f sur $f\Big|_{\mathbb{R}_+}$ est donc $y \in [1 ; +\infty[\longmapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

4) La fonction f est définie et continue sur $]1 ; +\infty[$ puisque $x \longmapsto x^{3/4} = e^{3\ln(x)/4}$ est définie et continue sur $]1 ; +\infty[$, $x \longmapsto x^{3/4} - 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\ln$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient x et y dans $]1 ; +\infty[$ tels que $x < y$. On a $x^{3/4} < y^{3/4}$ (puisque $\ln$ et $\exp$ sont strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$ respectivement. Ensuite $x^{3/4} - 1 < y^{3/4} - 1$ puis $f(x) < f(y)$ puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le théorème de la bijection nous assure alors que f réalise une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur $f(]1 ; +\infty[) =]\lim_{1^+} f ; \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$.

Explicitons sa réciproque. Soient $x \in]1 ; +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$y = f(x) \iff e^y = x^{3/4} - 1 \iff e^y + 1 = x^{3/4} \iff (e^y + 1)^{4/3} = x.$$

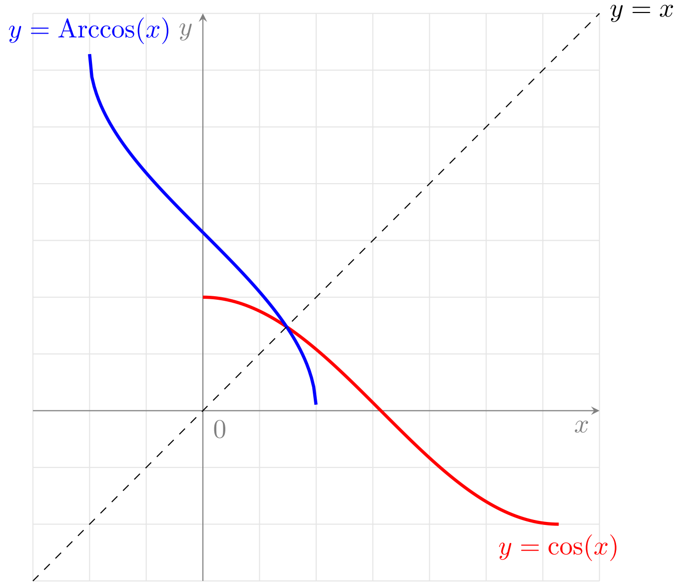
Ainsi $f^{-1} : y \in \mathbb{R} \longmapsto (e^y + 1)^{4/3}$.

Exercice 15.

1) a) Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0 ; \pi]$ sur un intervalle à préciser. On note Arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arccos et tracer sa courbe représentative.
   b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction en Python nommée qui prend en argument un réel $x \in [-1 ; 1]$ et qui calcule (une valeur approchée à 10^{-6} près de) $\text{Arccos}(x)$.
   On pourra ajouter un message d'erreur si on donne un réel $x \notin [-1 ; 1]$ en argument.
   c) Écrire des instructions en Python qui tracent la fonction Arccos sur $[-1 ; 1]$.
2) a) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2 ; \pi/2]$ sur un intervalle à préciser. On note Arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arcsin et tracer sa courbe représentative.
   b) A l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction en Python nommée qui prend en argument un réel $x \in [-1 ; 1]$ et qui calcule (une valeur approchée à 10^{-6} près de) $\text{Arcsin}(x)$.
   On pourra ajouter un message d'erreur si on donne un réel $x \notin [-1 ; 1]$ en argument.
   c) Écrire des instructions en Python qui tracent la fonction Arcsin sur $[-1 ; 1]$.
3) Donner les valeurs de $\sin(\text{Arccos}(x))$ et $\cos(\text{Arcsin}(x))$ pour tout $x \in [-1 ; 1]$.

Correction :

1) a) La fonction $\cos$ est strictement décroissante et continue sur $[0 ; \pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[0 ; \pi]$ sur $[-1 ; 1]$. Sa réciproque est strictement décroissante sur $[-1 ; 1]$.



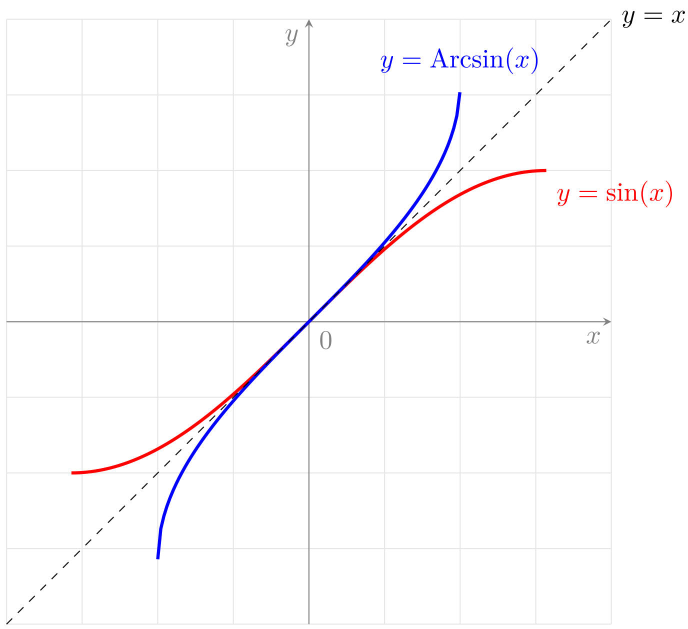
b)

```python
import numpy as np
def Arccos(x):
    a=0; b=np.pi
    while b-a>10**(-6):
        c=(a+b)/2
        if np.cos(c)>x:#Comme cos(a)>x et cos(c)>x,
            a=c#On continue avec "la partie de droite"
        else:
            b=c
    return a
```

c)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(-1,1,10000)
Y=[Arccos(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

2) a) La fonction $\sin$ est strictement croissante et continue sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$. De plus $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\cos(\pi/2) = 1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[-\pi/2\,;\pi/2]$ sur $[-1\,;1]$. Sa réciproque est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.



b)
```python
import numpy as np
def Arcsin(x):
    b=np.pi/2; a=-b
    while b-a>10**(-6):
        c=(a+b)/2
        if np.sin(c)>x:#Comme sin(a)<x et cos(c)>x,
            b=c#On continue avec "la partie de gauche"
        else:
            a=c
    return a
```

c)
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(-1,1,10000)
Y=[Arcsin(x) for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

3) Soit $x \in [-1\,;1]$. On a

- $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ donc $\sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - \cos^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - x^2$. Or $\text{Arccos}(x) \in [0\,;\pi]$ donc $\sin(\text{Arccos}(x)) > 0$ et donc $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
- $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ donc $\cos^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - x^2$. Or $\text{Arcsin}(x) \in [-\pi/2\,;\pi/2]$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) > 0$ et donc $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 18. On introduit les fonctions

$$f : x \longmapsto \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[\longmapsto \tan(x).$$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
2) Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\text{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Correction :

1) On a $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to(-1)^+} \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$$

donc, par composition

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour que f soit continue à gauche, on la prolonge en posant $f(-1) = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Si $x \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[\Big\backslash \Big\{-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\Big\}$, alors la formule de duplication de la tangente entraîne alors que $\dfrac{2g(x)}{1-g^2(x)} = g(2x)$. Par conséquent

$$f \circ g(x) = \text{Arctan}(\tan(2x)) = \begin{cases} 2x+\pi & \text{si} \quad x \in \left]-\pi/2\,;\pi/4\right[, \\ 2x & \text{si} \quad x \in \left]-\pi/4\,;\pi/4\right[, \\ 2x-\pi & \text{si} \quad x \in \left]\pi/4\,;\pi/2\right[. \end{cases}$$

Soit $x \in D_f$. On a donc

$$f(x) = f \circ g \circ g^{-1}(x) = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) + \pi & \text{si} \quad \operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\pi/2\,;\pi/4\right[, \\ 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si} \quad \operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\pi/4\,;\pi/4\right[, \\ 2\operatorname{Arctan}(x) - \pi & \text{si} \quad \operatorname{Arctan}(x) \in \left]\pi/4\,;\pi/2\right[, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2\operatorname{Arctan}(x) + \pi & \text{si} \quad x \in \left]-\infty\,;-1\right[, \\ 2\operatorname{Arctan}(x) & \text{si} \quad x \in \left]-1\,;1\right[, \\ 2\operatorname{Arctan}(x) - \pi & \text{si} \quad x \in \left]1\,;+\infty\right[. \end{cases}$$

3) On en déduit le tracé de la courbe représentative de f :