Correction de quelques exercices de la feuille de TD 13

Exercice 2. (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites en les (éventuelles bornes infinies) ainsi que les limites infinies en un réel. On déterminera les équations des éventuelles asymptotes[1] à leur courbe représentative.

1) $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

2) $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$.

3) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x + 1}{9 - 4x^2}$.

4) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$.

5) $x \mapsto x + \sqrt{x+1}\ln(x+1)$.

6) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

Correction :

1) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- **en $+\infty$:** On a
$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1-0}{1+0} = 1.$$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$.
- **en $-\infty$:** On a
$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{0-1}{0+1} = -1.$$
La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

2) La fonction $f : x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- **en $+\infty$:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) = x + \ln(1 + e^{-2x})$. Ainsi
$$f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1) = 0,$$
par continuité de $\ln$ en 1. Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
- **en $-\infty$:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \ln(e^{-x}(e^{2x} + 1)) = -x + \ln(e^{2x} + 1)$. Ainsi
$$f(x) + x = \ln(e^{2x} + 1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1) = 0,$$
par continuité de $\ln$ en 1. Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

3) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x + 1}{9 - 4x^2}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3/2, 3/2\}$.

- **en $+\infty$:** On a $\dfrac{x^3}{-4x^2} = -\dfrac{x}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Ensuite $\dfrac{x^3}{-4x^3} = -\dfrac{1}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{-1}{4}$ donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{-1}{4}$. Pour tout $x \in D_f$,
$$f(x) + \frac{x}{4} = \frac{4x^3 - 16x^2 + 20x + 4 + x(9 - 4x^2)}{4(9 - 4x^2)} = \frac{-16x^2 + 29x + 4}{4(9 - 4x^2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{-16}{-16} = 1.$$
Ainsi la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{4} + 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

[1] Si la courbe représentative d'une fonction f admet pour asymptote en $+\infty$ (c'est le même principe en $-\infty$) d'équation $y = ax+b$, alors $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Réciproquement, si a et b calculés ainsi sont des réels, alors on vient de trouver l'équation de l'asymptote, n'est-ce pas ?

- **en** $-\infty$ **:** On a $\dfrac{x^3}{-4x^2} = -\dfrac{x}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
De même $f(x) + \dfrac{x}{4} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$ donc la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -\dfrac{x}{4} + 1$ pour asymptote oblique en $-\infty$.
- **en** $3/2$ **:** Si $x = \dfrac{3}{2}$, $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = \dfrac{27}{8} - \dfrac{4\times 9}{4} + \dfrac{5\times 3}{2} + 1 = \dfrac{27 - 72 + 60 + 8}{8} = \dfrac{23}{8} > 0$. On a $9 - 4x^2 \xrightarrow[x\to(3/2)^+]{} 0^-$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to(3/2)^+]{} -\infty$. On a $9 - 4x^2 \xrightarrow[x\to(3/2)^-]{} 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to(3/2)^-]{} +\infty$
- **en** $-3/2$ **:** Si $x = -\dfrac{3}{2}$, $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = -\dfrac{27}{8} - \dfrac{4\times 9}{4} - \dfrac{5\times 3}{2} + 1 = \dfrac{-27 - 72 - 60 + 8}{8} < 0$. On a $9-4x^2 \xrightarrow[x\to(-3/2)^-]{} 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to(-3/2)^+]{} -\infty$. On a $9-4x^2 \xrightarrow[x\to(-3/2)^-]{} 0^-$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to(-3/2)^-]{} +\infty$

4) La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$ est définie sur $D_f =]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup]5, +\infty[$.

- **en** 5^+ **:** On a $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}} \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} +\infty$.
La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en 5^+.
- **en** $\pm\infty$ **:** Pour tout $x \in D_f$, on a $\dfrac{2+3x}{x-5} = \dfrac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}}$. Ainsi $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et, par continuité de la fonction racine cubique en 3, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. De même $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $\pm\infty$.

5) Traitée en cours.
6) Traitée en cours.

Exercice 4. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}, \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x + e^{-1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)\ln(-x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{-3/2}(1-\cos(2x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Correction :

- Les fonctions $x \longmapsto x - 1$ et $x \longmapsto \sqrt{x} - 1$ sont continues et à valeurs strictement positives sur $]1, +\infty[$. Puisque $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que f est continue sur $]1, +\infty[$. Il est immédiat que f est continue sur $]-\infty, 1]$.

  Si $x > 1$, alors

  $$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) = -\ln(\sqrt{x}+1) \xrightarrow[x\to1^+]{} -\ln(2),$$

  par continuité de la fonction racine en 1 et de $\ln$ en 2. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} 0 \neq -\ln(2)$, la fonction f n'est donc pas continue en 1.
- Traitée en cours.
- On montre facilement que h est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

  — On a $\sin(x)\ln(-x) = \dfrac{\sin(x)}{x}(-x)\ln(-x) \xrightarrow[x\to0^-]{} 0 = h(0)$ puisque $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$ et, par croissances comparées, $u\ln(u) \xrightarrow[u\to0^+]{} 0$.

— On a $x^{-3/2}(1-\cos(2x)) = \dfrac{2\sin^2(x)}{x^{3/2}} = 2\sqrt{x}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = h(0)$ puisque $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
Ainsi h est continue en 0 et donc h est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Nous définissons les fonctions $\phi = \min(f,g)$ et $\psi = \max(f,g)$ sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \phi(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Montrer que $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues sur I.

On pourra écrire au préalable $\max(x,y)$ et $\min(x,y)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en termes d'opérations élémentaires et de valeurs absolues.

Correction : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a (formules vues en remarque dans le chapitre 2) :

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x = \min(x,y)$$

et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y).$$

Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, alors les fonctions $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ et $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ sont continues en x_0.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x-1)$. Soit y un réel quelconque. On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{2}$.

1) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.
3) Caractériser la fonction f.

Correction :

1) Posons $x = 1$ de telle sorte que $x = \dfrac{1+x}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n - x = \frac{1+y_n}{2} - \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2}(y_n - x).$$

Ainsi $(y_n - x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Ainsi elle converge vers 0 et donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x = 1$.

2) On a $y_0 = y$ donc $f(y_0) = f(y)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(y_n) = f(y)$. On a alors

$$f(y_{n+1}) = f(2y_{n+1} - 1) = f\left(2\,\frac{1+y_n}{2} - 1\right) = f(y_n) = f(y).$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.

3) Puisque f est continue en 1, on en déduit que $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$. Mais on a aussi $f(y_n) = f(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(y)$. Par unicité de la limite, $f(y) = f(1)$. Cela est valable quel que soit $y \in \mathbb{R}$. Ainsi f est constante.

Exercice 9. Notons $\mathcal{A} = \left\{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\right\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1) La fonction non constante $g_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_0(x^2) = g_0(x)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Raisonnons par récurrence. L'initialisation est immédiate. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. On a alors

$$f(x^{1/2^{n+1}}) = f\left(\sqrt{x^{1/2^n}}\right) = f\left(\left(\sqrt{x^{1/2^n}}\right)^2\right) = f(x^{1/2^n}) = f(x).$$

D'où le résultat par récurrence. Puisque la fonction f est continue en 1 et que $x^{1/2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient $f(x) = f(x^{1/2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$. Ainsi $f(x) = f(1)$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}^*$. Puisque f est continue en 0, on obtient $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas croissante.

Correction : Soit $A \geqslant 0$. Puisque $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $f(n) \geqslant A$. Posons $B = n_0$. Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant f(B) = f(n_0) \geqslant A$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

C'est faux a priori si f n'est pas croissante. Par exemple considérons : $f : x \longmapsto x\cos(2\pi x)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n \times 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On a alors $f\left(\frac{n\pi}{4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{n\pi}{4}\right) = n \times 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 12. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

Correction : Notons $T > 0$ une période de f et notons ℓ la limite finie de f en $\mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. Considérons $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x > A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 + nT > A$. On a alors

$$|f(x_0) - \ell| = |f(x_0 + nT) - \ell| \leqslant \varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}.$$

C'est absurde. Ainsi f est constante égale à ℓ.

Exercice 13. La fonction de Dirichlet est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0, il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0.
2) Étudier la continuité de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto xf(x)$.

Correction :

1) • Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0 + \dfrac{\pi}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de telle sorte que $f(x_n) = 0$. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $0 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 0$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. On a vu en cours (cf. chapitre 6) qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x_0. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $1 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 1$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.

2) On montre de même que la fonction φ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^*$. Par contre elle est continue en 0. En effet, puisque f est bornée par 1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x|\, f(x) \leqslant |x|.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, on obtient par encadrement $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$. D'où la continuité de φ en 0.