Correction de quelques exercices de la feuille de TD 12

Exercice 1. On joue au jeu suivant : on lance deux dés équilibrés à 6 faces. Si aucune des faces ne vaut 6, alors on gagne le produit des deux chiffres obtenus en euros. Si une au moins des faces vaut 6, alors on ne gagne rien. Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise ce jeu et définir une variable aléatoire X qui donne le gain de ce jeu. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 5), \qquad \mathbb{P}(21 \leqslant X < 25), \qquad \mathbb{P}(X > 18) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \in \{10; 12; 14\}).$$

Correction : Le tableau résume les résultats associés aux 36 lancers de dés possibles :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	0
2	2	4	6	8	10	0
3	3	6	9	12	15	0
4	4	8	12	16	20	0
5	5	10	15	20	25	0
6	0	0	0	0	0	0

On en déduit que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25\}$ et

k	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	20	25
$36 \times \mathbb{P}(X = k)$	11	1	2	2	3	2	2	2	1	2	2	2	1	2	1

On a

- $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{1+2+2+3+2}{36} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$,
- $\mathbb{P}(21 \leqslant X < 25) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- $\mathbb{P}(X > 18) = \dfrac{2+1}{36} = \dfrac{1}{12}$,
- $\mathbb{P}(X \in \{10, 12, 14\}) = \dfrac{2+2+0}{36} = \dfrac{1}{9}$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0\,;1[$. Déterminer de deux façons différentes la loi de $Y = n - X$.

Correction :

- *Méthode 1.* On a $X(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ donc $Y(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

  Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$,

  $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}.$$

  Il s'ensuit que $Y = n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$.

- *Méthode 2.* On effectue n expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p. Si X compte le nombre de succès, alors $n - X$ compte le nombre d'échecs (ou de succès si on inverse succès et échec, la probabilité de succès devenant alors $1-p$). Il s'ensuit que $Y = n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Exercice 4. Un chercheur de l'université Paris-Sud se rend deux à trois fois par semaine à Paris (20 trajets sur le mois) avec le RER B. D'après des statistiques, un train sur trois accuse un retard. Quelle est la probabilité que ce francilien arrive en retard au plus cinq fois en un mois ?

Correction : Notons X le nombre de fois que le chercheur arrive en retard dans le mois. A chaque fois qu'il prend le train, il a une probabilité $1/3$ d'arriver en retard (succès) et une probabilité $2/3$ d'arriver à l'heure (échec). On peut donc considérer les trajets comme des expériences de Bernoulli de paramètres $1/3$. Elles sont identiques et on peut supposer qu'elles sont indépendantes. Il s'ensuit que X suit une loi binomiale de paramètre 20 et $1/3$.

La probabilité que le chercheur arrive au plus 5 fois en retard est donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant 5) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k} \\
&= \frac{1}{3^{20}} \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 2^{20-k} \\
&= \frac{1}{3^{20}} \left(\binom{20}{0} 2^{20} + \binom{20}{1} 2^{19} + \binom{20}{2} 2^{18} + \binom{20}{3} 2^{17} + \binom{20}{4} 2^{16} + \binom{20}{5} 2^{15} \right) \\
&= \frac{2^{15}}{3^{20}} \Bigg(32 + 20 \cdot 16 + \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} \cdot 8 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \\
&\qquad\qquad + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Bigg) \\
&\approx 0,2972
\end{aligned}$$

Exercice 6. Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0\,;1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Correction : Notons X_1 (resp. X_2) le nombre de musiciens absents dans le groupe 1 (resp. 2). Le fait d'être absent (succès) ou à l'heure (échec) pour un musicien est une épreuve de Bernoulli de paramètre p, et cela indépendamment des autres musiciens. Nous en déduisons que X_1 suit une loi $\mathcal{B}(4, p)$ et X_2 une loi $\mathcal{B}(6, p)$. La probabilité que le groupe 1 se produise est

$$\begin{aligned}
P_1 = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k} &= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 \\
&= (1-p)^2 \big(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2\big) \\
&= (1-p)^2 \big(1 + 2p + 3p^2\big)
\end{aligned}$$

La probabilité que le groupe 2 se produise est

$$\begin{aligned}
P_2 = \mathbb{P}(X_2 \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k} &= (1-p)^6 + 6p(1-p)^5 + 15p^2(1-p)^4 + 20p^3(1-p)^3 \\
&= (1-p)^3 \big(1 - 3p + 3p^2 - p^3 + 6p - 12p^2 + 6p^3 + 15p^2 - 15p^3 + 20p^3)\big) \\
&= (1-p)^3 \big(1 + 3p + 6p^2 + 10p^3\big).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
P_1 - P_2 &= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2\big) - (1-p)^3\big(1+3p+6p^2+10p^3\big)\\
&= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2 - (1-p)\big(1+3p+6p^2+10p^3\big)\big)\\
&= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2-1-3p-6p^2-10p^3+p+3p^2+6p^3+10p^4\big)\\
&= (1-p)^2\big(-4p^3+10p^4\big)\\
&= 2p^3(1-p)^2(5p-2).
\end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $p > \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 1.
- Si $p < \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 2.
- Si $p = \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 = P_2$ et il n'y a pas de préférence

Exercice 13 (Loi des tirages avec ou sans remise). Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \dfrac{r}{N}$.

1) On tire successivement avec remise n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On dit que la loi binomiale est la loi des tirages avec remise.
2) Désormais on tire successivement sans remise n boules dans l'urne et on note X_N le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $X_N(\Omega)$.
   b) Montrer que, pour tout $k \in X_N(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_N = k) = \dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}\Big/\dbinom{N}{n}$.

   On dit que X_N suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$. On dit aussi que la loi hypergéométrique est la loi des tirages sans remise.
   c) Retrouver la formule de Vandermonde : si a, b, n sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant a + b$, alors
   $$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$
   d) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X_N) = np$.

Correction :

1) Les N tirages successifs sont des expériences de Bernoulli puisqu'il y a deux issues possibles : tirer une boule rouge (succès) ou une boule bleue (échec). Ils sont identiques et indépendants (puisqu'on effectue ces tirages avec remise). Le nombre R de boules rouges obtenues est donc le nombre de succès. Par conséquent $R \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$.

2) a) Puisque les tirages se font successivement et sans remise, on peut considérer Ω l'ensemble des tirages successifs et sans remise de n boules dans l'urne. On peut aussi supposer que les boules rouges sont numérotées de 1 à r et les boules bleues sont numérotées de $r+1$ à $r+b=N$ et considérer Ω l'ensemble des n-listes d'éléments distincts de $[\![1\,;n]\!]$. On a alors $\operatorname{card}(\Omega) = \dfrac{N!}{(N-n)!}$. On munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité.

   Remarque : *Les tirages se font successivement et sans remise mais, comme on ne s'intéresse qu'au nombre de boules rouges tirées, l'ordre des tirages ne compte pas. On peut donc supposer que l'on tire simultanément n boules dans l'urne considérer ainsi Ω l'ensemble des tirages simultanés. Dans ce cas* $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{N}{n}$.

b) Si $r \leqslant n$ (resp. $r > n$), alors on tire au maximum r boules rouges (n boules rouges). Si $n \leqslant b$ (resp. $n > b$), alors on tire au minimum 0 (resp. $n-b$) boules rouges.
On a donc $X_N(\Omega) = [\![\max(0, n-b), \min(r,n)]\!]$.

> ***Remarque :*** *On pourrait aussi dire que $X_N(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$ pour simplifier les calculs mais alors certaines valeurs seront prises par X_N avec probabilité nulle.*

Soit $k \in X_N(\Omega)$. L'événement $[X_N = k]$ est l'ensemble des tirages de k boules rouges et $n-k$ boules bleues. Pour obtenir un tel tirage, on peut d'abord choisir les tirages où on obtient une rouge (il y a $\binom{n}{k}$ façons) puis tirer les rouges (il y a r choix pour la première, $r-1$ pour la deuxième, etc. $r-k+1$ pour la dernière) et enfin tirer les bleues (il y a b choix pour la première, $b-1$ pour la deuxième, etc. $b-(n-k)+1$ pour la dernière). Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{card}([X_N = k]) = \binom{n}{k}\frac{r!}{(r-k)!}\,\frac{(N-r)!}{(N-r-n+k)!} &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\,\frac{r!}{(r-k)!}\,\frac{(N-r)!}{(N-r-n+k)!} \\ &= n!\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{\operatorname{card}([X_N = k])}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

> ***Remarque :*** *Si on prend $X_N(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$, les formules utilisées deviennent fausses dès lors que $k \notin [\![\max(0,n-b), \min(r,n)]\!]$. Néanmoins la formule finale se prolonge à ces cas-là puisque, par convention, pour tous entiers naturels x et y tels que $y > x$, on a $\binom{x}{y} = 0$. Notons aussi que la preuve ci-dessus est plus rapide si on considère plutôt Ω l'ensemble des tirages simultanés. En effet, $\binom{pN}{k}$ est le nombre de façons de tirer k boules parmi les $r = pN$ boules rouges et $\binom{(1-p)N}{n-k}$ est le nombre de façons de tirer $n-k$ boules bleues parmi les $N - r = (1-p)N$ boules bleues.*

c) Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $c \in [\![0, a+b]\!]$. Si on pose $n = c$, $r = a$ et $N = a+b$ dans l'expérience aléatoire précédente, on obtient

$$1 = \sum_{k=\max(0,c-b)}^{\min(a,c)} \mathbb{P}(X_N = k) = \sum_{k=\max(0,c-b)}^{\min(a,c)} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{c-k}}{\binom{a+b}{c}}.$$

Ainsi

$$\binom{a+b}{c} = \sum_{k=\max(0,c-b)}^{\min(a,c)} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k}$$

puisque $\binom{a}{k} = 0$ pour tout $k > a$ et $\binom{b}{c-k} = 0$ pour tout $k < c-b$.

d) On a

$$\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=\max(0,c-b)}^{\min(a,c)} k\mathbb{P}(X_N = k) = \sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(r,n)} k\,\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \sum_{k=\max(0,n-b)+1}^{\min(r,n)} \frac{r\binom{r-1}{k-1}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

donc, en faisant le changement d'indice $j = k-1$

$$\mathbb{E}(X_N) = \frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{j=\max(0,n-b)}^{\min(r,n)-1}\binom{r-1}{j}\binom{N-r}{n-j-1} = \frac{r}{\binom{N}{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{r-1}{j}\binom{N-r}{(n-1)-j}.$$

En appliquant la formule de Vandermonde avec $a=r-1$, $b=N-r$ et $c=n-1$ donne :

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{r-1}{j}\binom{N-r}{(n-1)-j}=\binom{r-1+N-r}{n-1}=\binom{N-1}{n-1}=\frac{n}{N}\binom{N}{n}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X_N)=\frac{r\,\dfrac{n}{N}\dbinom{N}{n}}{\dbinom{N}{n}}=\frac{rn}{N}$$

c'est-à-dire $\mathbb{E}(X_N)=np$.

Exercice 17. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $c\in\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$ telle que

$$\forall k\in[\![0\,;n]\!],\qquad \mathbb{P}(X=k)=\frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction : Il faut et il suffit que c soit positif et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{c}{k+1}\binom{n}{k}$. Or on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\qquad\text{(changement de variable } j=k+1)\\&=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}-1\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi $c=\dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$. On calcule ensuite :

- D'après la formule de transfert $\mathbb{E}(X+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}c\binom{n}{k}=c\,2^n$. Ainsi, par linéarité,

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X+1)-1=c\,2^n-1=\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}-1=\frac{2^n(n+1)-2^{n+1}+1)}{2^{n+1}-1}=\frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}.$$

- D'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(X(X+1))=\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}ck\binom{n}{k}=c\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=cn\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}=cn\,2^{n-1}.$$

Ainsi, par linéarité, $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X+1))-\mathbb{E}(X)=cn\,2^{n-1}-c\,2^n+1$. Ainsi

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=cn\,2^{n-1}-c\,2^n+1-(c\,2^n-1)^2=cn\,2^{n-1}-c^2\,4^n+c\,2^n.$$

Exercice 20. On dispose d'un stock suffisant de boules rouges et d'une urne qui contient $r\geqslant 2$ boules rouges et $b\geqslant 2$ boules bleues. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est rouge, on la remet dans l'urne. Si elle est bleue, on la remplace par une rouge et on la remet dans l'urne. On recommence cette opération autant de fois que nécessaire. Écrire une fonction en Python prenant en argument `r,b,n` qui simule `n` tirages successifs avec cette règle et renvoie la liste `R=[r`$_1$`,...,r`$_n$`]` où, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, `r`$_k$ est le nombre de boules rouges à l'issue du $k^{\text{ième}}$ tirage.

Correction : Il s'agit de faire n expériences et, à chaque expérience, si on tire une rouge (ce qui arrive avec probabilité égale au nombre de boules rouges au moment du tirage divisé par le nombre total de boules au moment du tirage) rien ne change au tirage d'après. Si on tire une bleue, le nombre de bleu diminue de 1 et le nombre de rouge augmente de 1. Durant toute l'expérience, il y aura donc $r+b$ boules au total.

```python
import numpy.random as rd
def EXO20(r,b,n):
    R=[]
    for k in range(n):#k fois de suite
        if rd.random(1,r+b+1)<=b:#Avec proba b/(r+b), on tire une bleue
            r=r+1#On ajoute une rouge
            b=b-1#On enlève une bleue
        R.append(r)
    return R
```

Exercice 21 (Urnes de Pòlya). Soient r_0, b_0 et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b_0 boules bleues et r_0 boules rouges. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre d de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 (resp. 0) si la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge (resp. bleue).

1) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée r_0, b_0, d, n et qui renvoie une liste contenant les couleurs piochées lors des n premiers tirages (en codant rouge par 1 et bleu par 0).
2) a) Donner les lois de X_1 et de X_2. Que remarque-t-on ?
   b) Est-ce que X_1 et X_2 sont indépendantes ?
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages.
   a) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \dfrac{r_0 + d\,\mathbb{E}(S_n)}{r_0+b_0+d\,n}$.
   c) Justifier que $\mathbb{E}(S_{n+1}-S_n) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1)$.
4) En déduire que la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Commenter ce résultat.

Correction :

1)
```python
import numpy.random as rd
def Polya(r0,b0,n,d):
    r=r0#Nombre de boules rouges
    b=b0#Nombre de boules bleues
    L=[]
    for k in range(n):#k fois de suite
        if rd.random(1,r+b+1)<=r:#Avec proba r/(r+b), on tire une rouge
            L.append(1)
            r=r+d#On ajoute d boules rouges
        else:#On tire une bleue
            L.append(0)
            b=b+d#On ajoute d boules bleues
    return L
```

2) a) • Puisque l'urne contient r_0 boules rouges et b_0 boules noires et puisque le tirage se fait uniformément, on a $\mathbb{P}(X_1=1) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$. Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{r_0}{r_0+b_0}\right)$.

• D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_1=0],[X_1=1])$ d'événements de probabilités non nulles, on a

$$\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2=1)\mathbb{P}(X_1=1) + \mathbb{P}_{[X_2=0]}(X_2=1)\mathbb{P}(X_1=0).$$

Si on a pioché une boule rouge au premier tirage alors on se retrouve avec r_0+d boules rouges et b_0 boules bleues avant le deuxième tirage si bien que $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2=1)\mathbb{P}([X_1=1]) = \dfrac{r_0+d}{r_0+d+b_0}$. Si on a pioché une boule bleue au premier tirage alors on se retrouve avec r_0 boules rouges et b_0+d boules bleues avant le deuxième tirage si bien que $\mathbb{P}_{[X_1=0]}(X_2=1) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0+d}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_2=1) = \frac{r_0+d}{r_0+b_0+d}\times\frac{r_0}{r_0+b_0} + \frac{r_0}{r_0+b_0+d}\times\frac{b_0}{r_0+b_0} = \frac{r_0}{r_0+b_0}.$$

On a donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{r_0}{r_0+b_0}\right)$.

On remarque que X_1 et X_2 ont la même loi.

b) On a $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2=1) = \dfrac{r_0+d}{r_0+d+b_0}$ et $\mathbb{P}(X_2=1) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$. Ainsi X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\dfrac{r_0+d}{r_0+d+b_0} = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$ si et seulement si $r_0^2+r_0b_0+dr_0+db_0 = r_0^2+dr_0+b_0r_0$ si et seulement si $db_0=0$. Ce n'est pas le cas (sauf si $d=0$, ce qui est logique, mais ce cas est exclu).

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Si on a tiré k boules rouges lors des n premiers tirages, alors l'urne contient r_0+kd boules rouges et $r_0+b0+nd$ en tout. Ainsi

$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1) = \frac{r_0+kd}{r_0+nd}.$$

b) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à S_n, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(S_n=k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{r_0+kd}{r_0+b_0+nd}\mathbb{P}([S_n=k])\\ &= \frac{1}{r_0+b_0+nd}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)+d\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}(S_n=k)\right) = \frac{r_0+d\mathbb{E}(S_n)}{r_0+b_0+nd}.\end{aligned}$$

c) On a $S_{n+1}-S_n=1$ si $X_{n+1}=1$ et 0 si $X_{n+1}=0$. Il s'ensuit que $\mathbb{E}(S_{n+1}-S_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}=1)$ et donc, par linéarité,

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n)+\mathbb{P}(X_{n+1}=1).$$

4) On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+2}=1) = \frac{r_0+d\mathbb{E}(S_{n+1})}{r_0+b_0+(n+1)d} &= \frac{r_0+d\mathbb{E}(S_n)+d\mathbb{P}(X_n=1)}{r_0+b_0+(n+1)d}\\ &= \frac{r_0+(r_0+b_0+dn)\mathbb{P}(X_{n+1}=1)-r_0+d\mathbb{P}(X_n=1)}{r_0+b_0+(n+1)d} = \mathbb{P}(X_{n+1}=1).\end{aligned}$$

Ainsi la suite $(\mathbb{P}(X_{n+1}=1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\mathbb{P}(X_1=1)=\dfrac{r_0}{r_0+b_0}$.

On a donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{r_0}{r_0+b_0}\right)$. On remarque que la probabilité de piocher une boule rouge est la même à chaque étape. En particulier elle ne dépend pas du nombre d de boules ajoutés.

Exercice 22. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1) Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie telle que $Y_n(\Omega)=[\![2\,;n+1]\!]$.

2) Écrire une fonction en Python qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui simule Y_n.

3) Soit $k\in[\![1\,;n]\!]$. Justifier qu'il y a $\dbinom{n}{k}n^{n+1-k}$ tirages de $n+1$ boules successivement avec remise dans cette

urne tels que les k premières sont dans l'ordre strictement décroissant.

4) Déterminer alors $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

5) En déduire que

$$\forall k \in [\![2\,;n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$

6) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Correction : A VENIR