Correction de quelques exercices de la feuille de TD 11

Exercice 3. On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{12}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}, \qquad p_5 = \frac{1}{6}, \qquad p_6 = \frac{1}{3}.$$

1) Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Décrire chacun des événements suivants comme des parties de Ω et calculer leurs probabilités :
   a) « Le chiffre est impair ».
   b) « Le chiffre est supérieur à 2 ».
   c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Correction :

1) On se donne $\Omega = [\![1\,;6]\!]$ et on munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de la probabilité

$$\mathbb{P} : A \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \sum_{i \in A} p_i.$$

Il s'agit bien d'une probabilité car elle est à valeur dans $\mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$$

(et la propriété d'additivité s'obtient automatiquement par sommation par paquets... pas la peine de le préciser).

2) a) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{1; 3; 5\}) = p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.
   b) $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p_1 = \dfrac{11}{12}$.
   c) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\{1; 3\}) = p_1 + p_3 = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$.
   d) $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\{1; 2; 3; 4; 5\}) = 1 - \mathbb{P}(\{6\}) = 1 - p_6 = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 6. Écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n non nul, qui simule l'expérience aléatoire consistant à effectuer des tirages successifs avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n jusqu'à ce que la somme cumulée des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à `n`. La fonction renverra le nombre de tirages effectués.

Correction : Cf. DM n° 7.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\Omega = [\![1\,; n]\!]$. Soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \dbinom{n}{k}$. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

Correction : Il s'agit de déterminer α tel que, pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) \geqslant 0$ (i.e. $\alpha \geqslant 0$) et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. On a donc

$$1 = \alpha \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n\alpha 2^{n-1},$$

d'après la formule du chef et la formule du binôme de Newton. Ainsi on prend $\alpha = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.

Exercice 10. Soient m, r, k, n des entiers naturels tels que $1 \leqslant m \leqslant r < n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$. Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n, elle échantillonne r pièces. En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses, quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ?

Correction : Ici l'espace considéré est l'ensemble des tirages de r pièces dans un lot de n pièces, il est de cardinal $\binom{n}{r}$. On munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)$ de l'équiprobabilité.

Soit A l'événement « trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ». Il y a $\binom{k}{m}\binom{n-k}{r-m}$ façons d'obtenir A. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\dbinom{k}{m}\dbinom{n-k}{r-m}}{\dbinom{n}{r}}.$$

Remarque : la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses suit la loi hypergéométrique de paramètres n, k et r.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$, posons

$$H(n) : \text{« Si } A_1, \ldots, A_n \text{ sont des événements, alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \text{ »} .$$

Procédons par récurrence.

- Si A_1 et A_2 sont des événements alors la formule de Poincaré entraîne que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

  Ainsi $H(2)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Supposons que $H(n)$ est vrai. Donnons-nous $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ des événements. La formule de Poincaré appliquée à $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et A_{n+1} donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}).\end{aligned}$$

  On applique l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k).$$

  Ainsi $H(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$, $H(n)$ est vraie.

Exercice 13 (Le problème des anniversaire avec Python). Soit $n \in [\![1\,;365]\!]$. Dans le cours, on a montré que dans une classe de n élèves[1], la probabilité qu'au moins deux élèves aient la même date de naissance est

$$p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

1) Écrire une fonction Python qui prend en argument $n \in [\![1\,;365]\!]$ et qui renvoie p_n.
2) a) Vérifier que, pour tout $n \in [\![1\,;364]\!]$,

$$p_{n+1} = 1 - (1 - p_n)\left(1 - \frac{n}{365}\right).$$

   b) Écrire alors une fonction Python qui prend en argument $x \in]0\,;1[$ et qui calcule le plus petit $n \in [\![1\,;365]\!]$ tel que $p_n \geqslant x$.
   c) La tester avec $x = 0,99$.

Correction :

```
def p(n):
    return 1-np.prod([1-k/365 for k in range(1,n)])

def np(x):
    n=1
    p=0
    while p<x:
        p=1-(1-p)*(1-n/365)
        n=n+1
    return n
```

`np(0.99)` donne 57.

Exercice 15 (Formule du crible). Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible généralise la formule de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1\,;n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

1) Écrire cette formule pour $n = 4$.
2) En déduire une formule analogue pour $\operatorname{card}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ où $F_1, \ldots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E.
3) Application : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. A l'approche des fêtes de Noël, les élèves de H1B ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom [1]. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.
   a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\operatorname{card}(\Omega)$.
   b) Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, introduisons A_j l'événement « Le $j^{\text{ième}}$ élève tire son nom ». Soient $k \in [\![1\,;n]\!]$ et J une partie de $[\![1\,;n]\!]$ de cardinal k. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

   c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Nous verrons au second semestre que cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ *lorsque* n *tend vers* ∞.
4) *Pour les plus courageux :* montrer la formule du crible (par récurrence).

Correction :

1) Supposons que $n = 4$. La formule devient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4)\\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4)\\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\end{aligned}$$

2) En considérant $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité et en multipliant par $\operatorname{card}(\Omega)$, on obtient

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1\,;n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} F_j\right).$$

3) a) Supposons que les élèves de la classe sont numérotés avec des entiers de 1 à n (par exemple rangés par ordre alphabétique). On code le tirage par une n-liste d'éléments distincts de $[\![1\,;n]\!]$ de telle sorte que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, l'élève i doit offrir un cadeau à l'élève dont le numéro est le $i^{\text{ième}}$ de la liste. On considère donc Ω l'ensemble des permutations de $[\![1\,;n]\!]$ (dont le cardinal est $n!$) muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité.

b) Soient $k \in [\![1\,;n]\!]$ et J une partie de $[\![1\,;n]\!]$ de cardinal k. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{\operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!},$$

car les éléments de $\bigcap_{j\in J} A_j$ sont les permutations laissant fixe les k éléments de J (que l'on peut voir comme une permutation des $n-k$ éléments n'étant pas dans J).

c) La formule du crible entraîne alors que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1\,;n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \frac{(n-k)!}{n!}\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{\substack{J \subset [\![1\,;n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} 1\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

4) *Cette démonstration offre un bel exemple de preuve par récurrence et de manipulation de sommes. Elle n'est absolument pas exigible et elle n'est à étudier que si vous avez déjà tout compris précédemment.*

Montrons la formule du crible par récurrence forte sur n. Si $n = 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1\,;n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = (-1)^2 \sum_{\substack{J \subset \{1\} \\ \operatorname{card}(J)=1}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \operatorname{card}(A_1).$$

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons-là au rang $n+1$: donnons-nous $A1, \ldots, A_{n+1}$ des ensembles. La formule de Poincaré entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right).\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right) = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}(A_j\cap A_{n+1})\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+2}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ n+1\in J,\,\mathrm{card}(J)=k+1}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$
$$= \sum_{p=2}^{n+1}(-1)^{p+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ n+1\in J,\,\mathrm{card}(J)=p}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right),$$

en ayant fait le changement de variable $p=k+1$. On a aussi

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ n+1\notin J,\,\mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+2}\mathbb{P}(A_k)+(-1)^{n+2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n+1}A_j\right)$$
$$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ n+1\in J,\,\mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)+\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ n+1\notin J,\,\mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+2}\mathbb{P}(A_k)+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)+(-1)^{n+2}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n+1}A_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\sum_{\substack{J\subset[\![1\,;n+1]\!]\\ \mathrm{card}(J)=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 17. On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série ?
- lorsque les composants sont montés en parallèle ?
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle ?

Correction : Notons F l'événement « le circuit fonctionne », F_A l'événement « le composant A fonctionne », F_B l'événement « le composant B fonctionne » et F_C l'événement « le composant C fonctionne ».

1. Ils peuvent aussi demander à leur professeur de participer à ce jeu... mais ça ne change rien à l'exercice.

1) Si les composants sont montés en série alors le circuit fonctionne si et seulement si les trois composants fonctionnent. Ainsi
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A \cap F_B \cap F_C) = \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B)\mathbb{P}(F_C) = \alpha\beta\gamma,$$
car les trois circuits sont indépendants.

2) Si les composants sont montés en parallèle alors le circuit fonctionne si et seulement si au moins un des trois composants fonctionne. Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_A \cup F_B \cup F_C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{F_A \cup F_B \cup F_C}) = \mathbb{P}(\overline{F_A} \cap \overline{F_B} \cap \overline{F_C}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{F_A})\mathbb{P}(\overline{F_B})\mathbb{P}(\overline{F_C}) \\ &= 1 - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),\end{aligned}$$
où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à l'avant dernière ligne.

3) Si A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle, alors le circuit fonctionne si A fonctionne et si le sous circuit fonctionne (qui lui fonctionne si l'un au moins fonctionne). Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F_A \cap (F_B \cup F_C)) = \mathbb{P}(F_A)\mathbb{P}(F_B \cup F_C) = \mathbb{P}(F_A)\big(\mathbb{P}(F_B) + \mathbb{P}(F_C) - \mathbb{P}(F_A \cap F_C)\big) \\ &= \alpha\big(\beta + \gamma - \beta\gamma\big).\end{aligned}$$
où on a utilisé le fait que les trois circuits sont indépendants à la deuxième et la dernière ligne, et la formule de Poincaré à l'avant dernière.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $2n+1$ urnes. Pour tout $k \in [\![0\,;2n]\!]$, l'urne k possède k boules jaunes, $2n-k$ boules bleues et n boules rouges. On considère l'expérience suivante : on choisit au hasard une urne (sans savoir son numéro) qui n'est pas la $n^{\text{ième}}$, on tire une boule dans cette urne et (sans la regarder) on la place dans l'urne n. On tire alors une boule dans l'urne n et on regarde sa couleur. Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune dans la $n^{\text{ième}}$ urne.

Exercice 19. Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Correction : Notons M l'événement « la mère est conductrice » et T l'événement « le test est positif ». Nous cherchons à évaluer $\mathbb{P}_T(M)$. D'après l'énoncé, nous avons
$$\mathbb{P}_M(T) = \frac{7}{10}, \qquad \mathbb{P}(M) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{10}.$$
Nous avons, via la formule de Bayes,
$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}.$$
De plus, via la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap M) + \mathbb{P}(T \cap \overline{M}) = \mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)(1 - \mathbb{P}(M)).$$
Ainsi
$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)(1 - \mathbb{P}(M))}.$$
On obtient
$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\frac{7}{10}\frac{2}{3}}{\frac{7}{10}\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\frac{1}{3}} = \frac{14}{15} \approx 0.933.$$

Exercice 21. On dispose d'un sac opaque de billes distinguables dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et sans remise. Calculer la probabilité de piocher

1) uniquement des billes d'une même couleur.
2) uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3) trois boules d'une couleur et deux d'une même autre couleur.
4) au moins une bille de chaque couleur.
5) trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Reprendre cet exercice avec des tirages avec remise.

Correction : Pour tout $i \in [\![1\,;5]\!]$, on note $R_i/V_i/B_i$ les événements « piocher rouge/bleue/verte au $i^{\text{ième}}$ tirage ». Il a $9+5+7=21$ billes.

Avec des tirages sans remise

1) Soit C l'événement « tirer uniquement des billes d'une même couleur ». On a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5).$$

La formule des probas composées entraîne que cette proba est égale à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{9}{21}\frac{8}{20}\frac{7}{19}\frac{6}{18}\frac{5}{17} + \frac{7}{21}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17} + \frac{5}{21}\frac{4}{20}\frac{3}{19}\frac{2}{18}\frac{1}{17}\\ &= \frac{17760}{2441880} = \frac{148}{20349} \approx 7,27 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

2) La proba de tirer uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(C)}\frac{7}{21}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}\\ &= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{21}{148} \approx 0,142.\end{aligned}$$

3) Notons A l'événement « tirer trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur ». A deux couleurs C_1 et C_2 fixée, notons A_{C_1,C_2} l'événement « tirer deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2 ». On a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{R,B}) + \mathbb{P}(A_{R,V}) + \mathbb{P}(A_{B,V}) + \mathbb{P}(A_{B,R}) + \mathbb{P}(A_{V,R}) + \mathbb{P}(A_{V,B}).$$

Par exemple,

$$A_{R,B} = (R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap B_5) \cup \cdots \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5).$$

Par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(A_{R,B}) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap B_5) + \cdots + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5).$$

Combien y a-t-il de termes dans cette somme ? Il y en a $\binom{5}{2} = 10$, ce qui correspond au nombre de façons d'ordonner deux boules de couleur rouge et trois boules de couleur bleue, sans tenir en compte de leur numéro. Ces 10 façons sont incompatibles et de même probabilité. De plus, la formule des probabilités composées entraîne que ces 10 probabilités valent $\frac{9}{21}\frac{8}{20}\frac{7}{19}\frac{6}{18}\frac{5}{17}$.

Avec le même raisonnement, on trouve :

$$\mathbb{P}(A_{B,R}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{7}{21}\frac{6}{20}\frac{9}{19}\frac{8}{18}\frac{7}{17}$$

$$\mathbb{P}(A_{R,V}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = 10 \times \frac{9}{21}\frac{8}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}$$

$$\mathbb{P}(A_{V,R}) = 10\,\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) = 10 \times \frac{5}{21}\frac{4}{20}\frac{9}{19}\frac{8}{18}\frac{7}{17}$$
$$\mathbb{P}(A_{V,B}) = 10\,\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{5}{21}\frac{4}{20}\frac{7}{19}\frac{6}{18}\frac{5}{17}$$
$$\mathbb{P}(A_{B,V}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{7}{21}\frac{6}{20}\frac{5}{19}\frac{4}{18}\frac{3}{17}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 7\cdot 6\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 4\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 5\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{21\cdot 2\cdot 19\cdot 18\cdot 17}\\ &= \frac{57408}{244188} = \frac{4784}{20349} \approx 0,235\end{aligned}$$

4) Notons E l'événement « les trois couleurs ont été piochées ». Notons $F_R/F_B/F_V$ les événements « ne piocher aucune boule rouge/bleue/verte ». La formule des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V) = 0, \quad \mathbb{P}(F_R) = \mathbb{P}(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \cap \overline{R}_4 \cap \overline{R}_5) = \frac{12}{21}\frac{11}{20}\frac{10}{19}\frac{9}{18}\frac{8}{17} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}$$
$$\mathbb{P}(F_B) = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}, \quad \mathbb{P}(F_V) = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_B) = \frac{5!}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}$$
$$\mathbb{P}(F_R \cap F_V) = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}, \quad \mathbb{P}(F_V \cap F_B) = \frac{9\cdot 8\cdot \cdot 6\cdot 5}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}.$$

La formule de Poincaré donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(F_R \cup F_B \cup F_V) &= \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} + \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} + \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}\\ &\quad - \frac{5!}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} - \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} - \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17} + 0\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \dfrac{841680}{2441880} = 1 - \dfrac{334}{969} = \dfrac{635}{969} \approx 0,655.$

5) Notons D l'événement « tirer trois boules d'une couleur, une d'une autre couleur et une autre d'encore une autre couleur ». Il y a $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 20$ façon deux à deux incompatibles de faire un tirage de trois billes rouges, une verte et une bleue. Par incompatibilités et d'après la formule des probabilités composées entraîne que

$$\mathbb{P}(D \cap E) = 20\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5) = 20 \times \frac{9}{21}\frac{8}{20}\frac{7}{19}\frac{5}{18}\frac{7}{17} = \frac{17640}{122094} = \frac{140}{969}.$$

Ainsi $\mathbb{P}_E(D) = \dfrac{\mathbb{P}(D \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{140}{635} = \dfrac{28}{127} \approx 0,220.$

Avec des tirages avec remise

1) Soit C l'événement « tirer uniquement des billes d'une même couleur ». On a

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5).$$

La formule des probabilités composées (ou l'indépendance, puisqu'ici les tirages sont indépendants) entraîne que cette probabilité est égale à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21} + \frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21} + \frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\\ &= \frac{9^5 + 7^5 + 5^5}{21^5} = \frac{3761}{194481} \approx 1,93\cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

2) La proba de tirer uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(C)}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21} = \frac{7^5}{9^5 + 7^5 + 5^5} = \frac{16807}{78981} \approx 0,213.\end{aligned}$$

3) Notons A l'événement « tirer trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur ». A deux couleurs C_1 et C_2 fixée, notons A_{C_1,C_2} l'événement « tirer deux boules de la couleur C_1 et trois de la couleur C_2 ». On a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{R,B}) + \mathbb{P}(A_{R,V}) + \mathbb{P}(A_{B,V}) + \mathbb{P}(A_{B,R}) + \mathbb{P}(A_{V,R}) + \mathbb{P}(A_{V,B}).$$

Par exemple,

$$A_{R,B} = (R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap B_5) \cup \cdots \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5).$$

Par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(A_{R,B}) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) + \mathbb{P}(R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap B_5) + \cdots + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5).$$

Combien y a-t-il de termes dans cette somme ? Il y en a $\binom{5}{2} = 10$, ce qui correspond au nombre de façons d'ordonner deux boules de couleur rouge et trois boules de couleur bleue, sans tenir en compte de leur numéro. Ces 10 façons sont incompatibles et de même probabilité. De plus, par indépendance, ces 10 probabilités valent $\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21} = \frac{9^2 7^3}{21^5}$.

Avec le même raisonnement, on trouve :

$$\mathbb{P}(A_{B,R}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{7^2 9^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{R,V}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = 10 \times \frac{9^2 5^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{V,R}) = 10\,\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap R_3 \cap R_4 \cap R_5) = 10 \times \frac{5^2 9^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{V,B}) = 10\,\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{5^2 7^3}{21^5}$$

$$\mathbb{P}(A_{B,V}) = 10\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5) = 10 \times \frac{7^2 5^3}{21^5}$$

et donc

$$\mathbb{P}(A) = 10\,\frac{9^2 7^2 + 7^2 9^3 + 9^2 5^3 + 5^2 9^3 + 5^2 7^3 + 7^2 5^3}{21^5} \qquad = \frac{3940}{194481} \approx 2,03 \times 10^{-2}$$

4) Notons E l'événement « les trois couleurs ont été piochées ». Notons $F_R/F_B/F_V$ les événements « ne piocher aucune boule rouge/bleue/verte ». Par indépendance,

$$\mathbb{P}(F_R \cap F_B \cap F_V) = 0, \quad \mathbb{P}(F_R) = \mathbb{P}(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3 \cap \overline{R}_4 \cap \overline{R}_5) = \frac{12}{21}\frac{12}{21}\frac{12}{21}\frac{12}{21}\frac{12}{21}$$

$$\mathbb{P}(F_B) = \frac{14}{21}\frac{14}{21}\frac{14}{21}\frac{14}{21}\frac{14}{21}, \quad \mathbb{P}(F_V) = \frac{16}{21}\frac{16}{21}\frac{16}{21}\frac{16}{21}\frac{16}{21} \quad \mathbb{P}(F_R \cap F_B) = \frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}$$

$$\mathbb{P}(F_R \cap F_V) = \frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}\frac{7}{21}, \quad \mathbb{P}(F_V \cap F_B) = \frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{9}{21}.$$

La formule de Poincaré donne

$$\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}(F_R \cup F_B \cup F_V) = \frac{12^5 + 14^5 + 16^5 - 5^5 - 7^5 - 9^5 + 0}{21^5} = \frac{27877}{64827}.$$

et donc $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E) = 1 - \frac{27877}{64827} = \frac{36950}{64827} =\approx 0,570.$

5) Notons D l'événement « tirer trois boules d'une couleur, une d'une autre couleur et une autre d'encore une autre couleur ». Il y a $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 20$ façon deux à deux incompatibles de faire un tirage de trois billes rouges, une verte et une bleue. Par incompatibilité et par indépendance,

$$\mathbb{P}(D \cap E) = 20\,\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap V_4 \cap B_5) = 20 \times \frac{9}{21}\frac{9}{21}\frac{5}{21}\frac{5}{21}\frac{7}{21} = \frac{8100}{64827}.$$

Ainsi $\mathbb{P}_E(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{8100}{36950} = \frac{162}{739} \approx 0,219.$