Correction de quelques exercices de la feuille de TD 10

Exercice 4. Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) de chacun de ses mots : BOWIE, MAISON, POSSIBLE, ANAGRAMME, LEDZEPPELIN, MISSISSIPPI ?

Correction :

- Il y a $5!$ anagrammes de BOWIE.
- Il y a $6!$ anagrammes de MAISON.
- Il y a $\binom{8}{2}6! = \dfrac{8!}{2}$ anagrammes de POSSIBLE.
- Il y a $\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \dfrac{9!}{3!2!}$ anagrammes d'ANAGRAMME.
- Il y a $\binom{11}{2}\binom{9}{3}\binom{6}{2}4! = \dfrac{11!}{3!2!2!}$ anagrammes de LEDZEPPELIN.
- Traitée en cours.

Exercice 5 (Formule de Poincaré pour trois ensembles).

1) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E fini. Montrer que $A \cup B \cup C$ est fini et que

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2) Quelques applications de cette formule (que l'on reverra dans le prochain chapitre).

a) Dans un ciné-club, 45 membres ont vu au moins un des trois films de Hitchcock *Vertigo*, *Psycho* et *Rear Window*. On sait que 33 d'entre eux ont vu *Vertigo*, 30 ont vu *Psycho* et 19 ont vu *Rear Window*. On sait aussi que 22 ont vu à la fois *Vertigo* et *Psycho*, 13 ont vu à la fois *Psycho* et *Rear Window*, 8 ont vu à la fois *Vertigo* et *Rear Window*. Combien de membres ont vu les trois films ?

b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?
On introduira D_3 (resp. D_5, resp. D_7) l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 divisibles par 3 (resp. 5, resp. 7).

Correction :

1) On applique plusieurs fois la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B \cup C) - \operatorname{card}(A \cap (B \cup C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ &\qquad - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B) \\ &\qquad - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2) a) Notons A l'ensemble des membres ayant vu *Vertigo*, B l'ensemble des membres ayant vu *Psycho* et C l'ensemble des membres ayant vu *Rear Window*. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cap B \cap C) &= \operatorname{card}(A \cup B \cup C) - \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(C) \\ &\qquad + \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) \\ &= 45 - 33 - 20 - 19 + 22 + 13 + 8 = 16.\end{aligned}$$

Ainsi 16 membres ont vu les trois films.

b) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\overline{D_3} \cap \overline{D_5} \cap \overline{D_7}) &= \operatorname{card}(\overline{D_3 \cup D_5 \cup D_7}) = 120 - \operatorname{card}(D_3 \cup D_5 \cup D_7) \\
&= 120 - \Big(\operatorname{card}(D_3) + \operatorname{card}(D_5) + \operatorname{card}(D_7) - \operatorname{card}(D_3 \cap D_5) \\
&\qquad - \operatorname{card}(D_3 \cap D_7) - \operatorname{card}(D_5 \cap D_7) + \operatorname{card}(D_3 \cap D_5 \cap D_7) \Big) \\
&= 120 - (40 + 24 + 17 - 8 - 5 - 3 + 1) = 54.
\end{aligned}$$

Exercice 7. Montrer (avec des arguments combinatoires) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0\,;n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Remarquons d'abord que le maximum d'une partie de $p+1$ éléments de $[\![1\,;n+1]\!]$ appartient nécessairement à $[\![p+1\,;n+1]\!]$. Ainsi, pour choisir une partie de $p+1$ éléments de $[\![1\,;n+1]\!]$ on peut d'abord choisir :

- une partie dont le maximum est $p+1$ (il n'y en a qu'une : celle qui consiste à prendre les entiers de 1 à $p+1$).
- ou bien une partie donc le maximum est $p+2$. Pour cela il suffit de choisir les p éléments de la partie n'étant pas le maximum parmi les entiers compris entre 1 et $p+1$. Il y a $\binom{p+1}{p}$ possibilités.
- ou bien une partie donc le maximum est $p+3$. Pour cela il suffit de choisir les p éléments de la partie n'étant pas le maximum parmi les entiers compris entre 1 et $p+2$. Il y a $\binom{p+2}{p}$ possibilités.
- etc.
- ou bien une partie donc le maximum est n. Pour cela il suffit de choisir les p éléments de la partie n'étant pas le maximum parmi les entiers compris entre 1 et $n-1$. Il y a $\binom{n-1}{p}$ possibilités.
- ou bien une partie donc le maximum est $n+1$. Pour cela il suffit de choisir les p éléments de la partie n'étant pas le maximum parmi les entiers compris entre 1 et n. Il y a $\binom{n}{p}$ possibilités.

Par principe additif, il y a donc

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p}$$

façons de choisir une partie de $p+1$ éléments de $[\![1\,;n+1]\!]$. Mais on sait qu'il y en a aussi $\binom{n+1}{p+1}$. D'où le résultat.

Exercice 11 (Mains au poker fermé). Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur (♣, ♠, ♢ ou ♡) et un rang (un numéro ou une figure). On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de 52 cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de 32 cartes[1]). On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Calculer le nombre total de mains possibles.

2) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :

 a) une **quinte flush** (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs) ?
 On introduira s_r le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s_{13} = 10$ et $s_8 = 4$.

 b) un **carré** (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque) ?

 c) un **full** (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang) ?

 d) une **couleur** (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?

 e) une **quinte** (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur) ?

 f) un **brelan** (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes) ?

 g) une **double paire** (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents) ?

h) une **paire** (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire) ?

i) une **carte haute** (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs) ?

En divisant les cardinaux de la question 2 par le nombre total de mains possibles, on obtient la probabilité d'obtenir chacune des différentes mains remarquables au poker fermé (dans le cas où les 5 cartes sont tirées de façon équiprobable, cf. chapitre suivant).

Correction :

1) Choisir une main revient à choisir 5 cartes distinctes parmi les $4r$ cartes, sans ordre. Il y a donc $\boxed{\binom{4r}{5}}$ mains possibles ($= 2598960100$ si $r = 13$ et $= 201376$ si $r = 8$).

2) a) Il y a $\boxed{4}$ quintes flush royales : $10♣ - J♣ - Q♣ - K♣ - A♣$, $10♠ - J♠ - Q♠ - K♠ - A♠$, $10♢ - J♢ - Q♢ - K♢ - A♢$ et $10♡ - J♡ - Q♡ - K♡ - A♡$.

b) Choisir une quinte flush non royale revient à choisir la suite[1] de cartes ($s_r - 1$ choix) puis leur couleur commune (4 choix). Ainsi il y a $\boxed{4(s_r - 1)}$ choix de mains avec une quinte flush ($= 36$ si $r = 13$ et 12 si $r = 8$).

c) Choisir un carré revient à choisir le rang des quatre cartes de même couleur (r choix) puis de choisir une des cartes restantes ($4r - 4$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4r(r-1)}$ choix de mains avec un carré ($= 624$ si $r = 13$ et 224 si $r = 8$).

d) Choisir un full revient à choisir :

- le rang des trois cartes de même rang (r choix) puis leurs trois couleurs ($\binom{4}{3} = 4$ choix),
- le rang des deux cartes de même rang ($r - 1$ choix puisqu'on ne peut bien sûr plus choisir le même rang que précédemment) puis deux cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{2} = 6$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{24r(r-1)}$ choix de mains avec un full ($= 3744$ si $r = 13$ et 1344 si $r = 8$).

e) Choisir une couleur revient à choisir la couleur des cinq cartes (4 choix) puis cinq cartes ayant cette couleur mais ne formant pas une suite ($\binom{r}{5} - s_r$ choix). Ainsi il y a $\boxed{4\binom{r}{5} - 4s_r}$ choix de mains avec une couleur ($= 5108$ si $r = 13$ et 208 si $r = 8$).

f) Choisir une quinte revient à choisir la suite (s_r choix) puis cinq cartes ayant ces rangs mais n'étant pas tous de la même couleur (4 choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020s_r}$ choix de mains avec une quinte ($= 10200$ si $r = 13$ et 4080 si $r = 8$).

g) Choisir un brelan revient à choisir :

- le rang des trois cartes de même rang (r choix) puis trois cartes parmi les quatre possibles ayant ce rang ($\binom{4}{3} = 4$ choix),
- les rangs des deux dernières cartes ($\binom{r-1}{2} = \frac{(r-1)(r-2)}{2}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un full) puis leurs couleurs respectives (4^2 choix).

Ainsi il y a $\boxed{32r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec un brelan ($= 54912$ si $r = 13$ et 10752 si $r = 8$).

h) Choisir une double paire revient à choisir :

- les rangs des deux paires ($\binom{r}{2}$ choix) puis, pour chaque paire, les deux couleurs des cartes ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- la dernière carte qui doit être d'un rang différent ($4r - 8$ choix).

Ainsi il y a $\boxed{72r(r-1)(r-2)}$ mains possibles avec une double paire ($= 123552$ si $r = 13$ et 24192 si $r = 8$).

1. Pour obtenir un jeu de 32 cartes à partir d'un jeu de 52 cartes, on enlève toutes les cartes numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6.

1. On a $s(8) = 4$. En effet les suites possibles dans un jeu de 32 cartes sont alors 7-8-9-10-J, 8-9-10-J-Q, 9-10-J-Q-K et 10-J-Q-K-A. On a $s(13) = 10$. En effet les suites possibles dans un jeu de 52 cartes sont les quatre précédentes ainsi que les suites A-2-3-4-5-6, 2-3-4-5-6, 3-4-5-6-7, 4-5-6-7-8, 5-6-4-7-8, 6-7-8-9-10.

i) Choisir une paire revient à choisir :

- le rang des deux cartes de même rang (r choix) puis leurs couleurs ($\binom{4}{2} = 6$ choix),
- les rangs des trois dernières cartes ($\binom{r-1}{3} = \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{6}$ car on ne peut pas choisir le même rang que précédemment et leurs rangs doivent être distincts afin de ne pas former un brelan ou une double paire) puis leurs couleurs respectives (4^3 choix).

Ainsi il y a $\boxed{64r(r-1)(r-2)(r-3)}$ mains possibles avec une paire ($= 1098240$ si $r = 13$ et 107520 si $r = 8$).

j) Choisir une carte haute revient à choisir le rang des cinq cartes ($\binom{r}{5} - s_r$ car les rangs doivent être distincts et ne pas former une suite) puis la couleur des cartes (4 choix pour chaque carte moins les 4 combinaisons où les cinq cartes sont de la même couleur, soit $4^5 - 4 = 1020$ en tout). Ainsi il y a $\boxed{1020\left(\binom{r}{5} - s_r\right)}$ mains possibles avec une carte haute ($= 1302540$ si $r = 13$ et 53040 si $r = 8$).

Pour anticiper sur le prochain chapitre : on considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est l'ensemble des mains et $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On divise donc les cardinaux obtenus par $\text{card}(\Omega) = \binom{4r}{5}$ pour obtenir les probabilités des différentes mains. On obtient le tableau de probabilités suivants (avec des approximations obtenues avec l'aide de Python) :

Main	*Probabilité ($r = 13$)*	*Probabilité ($r = 8$)*
Quinte flush royale	*0,000154 %*	*0,00199 %*
Quinte flush	*0,00139 %*	*0,0060 %*
Carré	*0,024 %*	*0,111 %*
Full	*0,144 %*	*0,667 %*
Couleur	*0,197 %*	*0,103 %*
Quinte	*0,392 %*	*2,026 %*
Brelan	*2,113 %*	*5,339 %*
Double paire	*4,754 %*	*12,013 %*
Paire	*42,257 %*	*53,393 %*
Carte haute	*50,118 %*	*26,339 %*

On remarque que, si $r = 13$, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces. Par contre, si $r = 8$, il est plus probable d'obtenir une paire qu'une carte haute et il est aussi plus probable d'obtenir un carré (et un full) qu'une couleur.