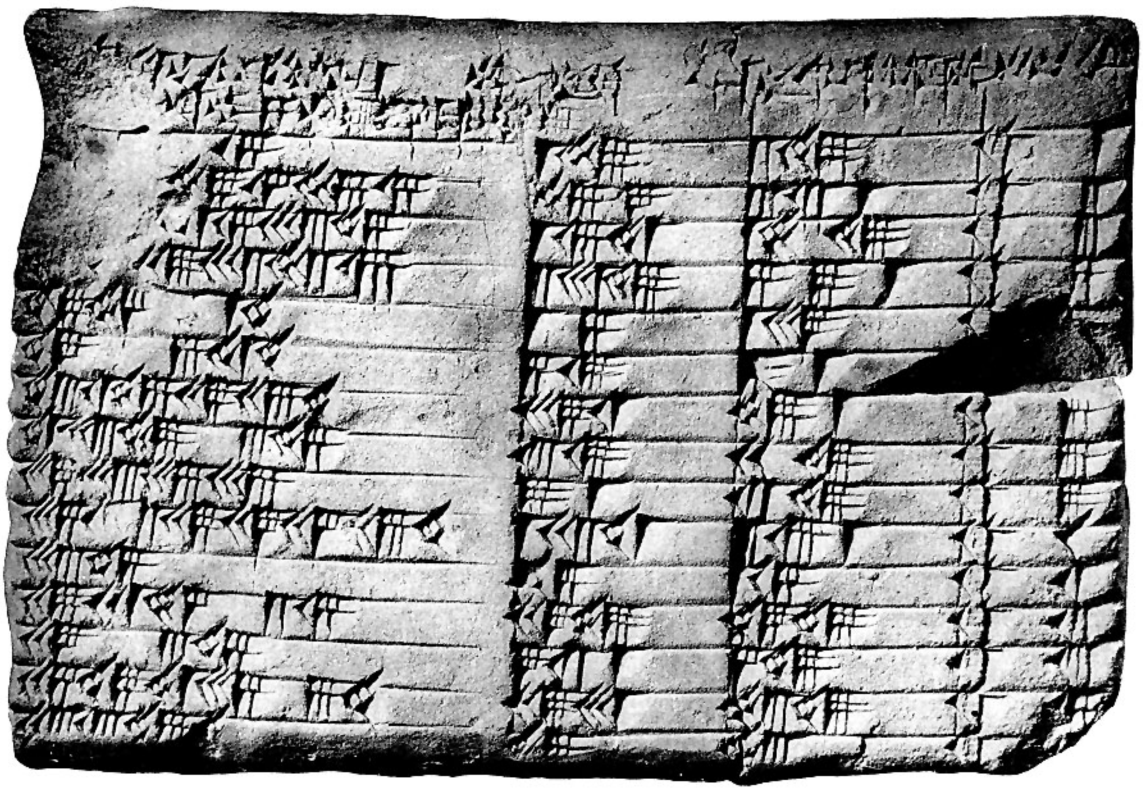
CPGE H1B Lycée Carnot
2023/2024

Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).
La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant de voir d'un seul coup d'œil les différentes fiches et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calcul.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calcul est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par vous-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `antoine@crouzet.education`. Si vous pensez avoir décelé une erreur, merci de donner aussi l'identifiant de la fiche, écrit en gris clair en haut à droite de chaque fiche.

001A

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0,2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ..

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ ....

c) $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in^*$ ....

b) $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in^2$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in^* \setminus \{1\}$. ....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in^*$, en utilisant la formule $1+2+\cdots+p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. ....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \setminus\{1\}$ et $x \in \setminus\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ......

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ...

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \setminus\{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \left(1+t^2\right)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ ....

b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ ......

c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ....

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

003A

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 + 4x + 4$ ....

c) $x^2 + 3x + 2$ ....

d) $3x^2 + 7x + 1$ ....

e) $2x^2 + 3x - 28$ ....

f) $-5x^2 + 6x - 1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$ ....

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ....

c) $xy + x + y + 1$ ....

d) $xy - x - y + 1$ ....

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..

f) $y^2\big(a^2 + b^2\big) + 16x^4\big(-a^2 - b^2\big)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$ ....

b) $\big(-9x^2 + 24\big)\big(8x^2 + 8\big) + 64x^4 - 64$ ....

c) $x^4 + x^2 + 1$ ....

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ....

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x+2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x) + 4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Calcul 4.8

On note $A = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. ....

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ……

b) $a^5 - a^6$ ……

c) a^{12} ……

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ……

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ……

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ……

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ……

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ……

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ……

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ……

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ……

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ……

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ……

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ……

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ……

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ ……

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} a^k$ ……

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{4} (2 - a^k)$ ……

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ ....

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ ....

c) $x^3 + y^3 + z^3$ ....

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ ....

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ ....

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ ....

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ ....

b) $x^4 + y^4 + z^4$ ....

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ ....

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ ....

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ ....

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ ....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ ....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ ....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ ....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ ....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ ....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ ....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ ....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ ....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — **Factorisation à vue.**

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

d) $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x - 40 = (x-5)(ax+b)$ ....

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x-\sqrt{7})(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — **Signe d'un trinôme.**

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$ ....

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ ....

b) $\ln 512$ ....

c) $\ln 0,125$ ....

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ ....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ ....

f) $\ln 36$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\frac{1}{12}$ ....

b) $\ln(2,25)$ ....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0,875)$ ....

d) $\ln 500$ ....

e) $\ln\frac{16}{25}$ ....

f) $\ln(6,25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$ ....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$. ....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ ....

c) Simplifier $\gamma = \ln\Big((2+\sqrt{3})^{20}\Big) + \ln\Big((2-\sqrt{3})^{20}\Big)$ ....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. ....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln 2}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln 3}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln 3-\ln 2}$ ....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln\frac{1}{2}}$ ....

b) $e^{-\ln\ln 2}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^4})-\ln(\sqrt{e^2})$ ....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right)$ ....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ ....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. ....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. ....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \{@R = 0mm^*_+[r]x@|- >[r]\ln(1+x).$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ ....

f) $\ln(-x-5) = \ln \dfrac{x-61}{x+7}$ ....

Fiche de calcul n° 8

007A

Trigonométrie

Prérequis
Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Simplifier :

a) $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{4} + \cos\dfrac{7\pi}{4}$.

b) $\sin\dfrac{5\pi}{6} + \sin\dfrac{7\pi}{6}$ ....

c) $\tan\dfrac{2\pi}{3} + \tan\dfrac{3\pi}{4} + \tan\dfrac{5\pi}{6} + \tan\dfrac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2\dfrac{4\pi}{3} - \sin^2\dfrac{4\pi}{3}$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ ....

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ....

Formules d'addition

Calcul 8.3

Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ (on a $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$) ....

b) $\cos\dfrac{\pi}{12}$ ....

c) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ....

d) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ ....

Calcul 8.4

a) Simplifier : $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$ ....

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) ....

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ ....

Formules de duplication

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \dfrac{\pi}{8}$

b) $\sin \dfrac{\pi}{8}$

Calcul 8.6

a) Simplifier : $\dfrac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$)

b) Simplifier : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans les équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

d) $\tan x = -1$

e) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

g) $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

i) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{7}$

j) $\sin x = \cos \dfrac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x \leqslant \cos \dfrac{\pi}{3}$

c) $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$

d) $|\sin x| \leqslant \dfrac{1}{2}$

e) $\tan x \geqslant 1$

f) $|\tan x| \geqslant 1$

g) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$

h) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in \,]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 9.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in \,]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — *bis.*

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 9.5 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \backslash 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

Calcul 10.2

Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

b) e^{2t+1} ....

c) $\dfrac{1}{1+9t^2}$ ....

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3 t}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ ....

c) $\dfrac{8e^{2t}}{(3-e^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$ ....

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 10.5 — **Trigonométrie.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2 t \sin t$ ……

b) $\cos(t)e^{\sin t}$ ……

c) $\tan t$ ……

d) $\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ ……

e) $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ ……

f) $\dfrac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ ……

g) $\tan^2 t$ ……

h) $\tan^3 t$ ……

i) $\dfrac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ ……

j) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ ……

k) $\dfrac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t}$ ……

l) $\dfrac{\cos t}{(1-\sin t)^3}$ ……

m) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ……

n) $\dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$ ……

Calcul 10.6 — **Trigonométrie –** ***bis.***

Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

a) $\cos^2 t$ ……

b) $\cos(t)\sin(3t)$ ……

c) $\sin^3 t$ ……

d) $\dfrac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}$ ……

e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t}$ ……

f) $\dfrac{1}{\sin(4t)}$ ……

Calcul 10.7 — **Fractions rationnelles.**

Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

a) $\dfrac{t^2+t+1}{t^2}$ ……

b) $\dfrac{t^2+1}{t^3}$ ……

c) $\dfrac{1-t^6}{1-t^2}$ ……

d) $\dfrac{t^3+1}{t+1}$ ……

e) $\dfrac{t-1}{t+1}$ ……

f) $\dfrac{t^3}{t+1}$ ……

g) $\dfrac{t-1}{t^2+1}$ ……

h) $\dfrac{t}{(t+1)^2}$ ……

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

a) t^2-2t+5 ……

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ……

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ……

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ……

e) $e^{2t}+e^{-3t}$ ……

f) e^{3t-2} ……

g) $\dfrac{t^2}{t^3-1}$ ……

h) $\dfrac{3t-1}{t^2+1}$ ……

i) $\sin(t)\cos^2(t)$ ……

j) $\dfrac{1}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$ ……

k) $\dfrac{e^t}{2+e^t}$ ……

l) $\dfrac{\sin t}{2+3\cos t}$ ......

m) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

n) $\dfrac{\sin 2t}{1+\cos^2 t}$ ......

o) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

p) $\dfrac{1-\ln t}{t}$ ....

q) $\dfrac{1}{t\ln t}$ ....

r) $\dfrac{\sin(\ln t)}{t}$ ....

s) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

Calcul 10.9 — ***Bis repetita.***

Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Fiche de calcul n° 11

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin 7x| \,\mathrm{d}x$ . . . .

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . . .

Calcul 11.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ . . . . .

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} 1 - 2x \,\mathrm{d}x$ . .

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ . . . .

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} 2x - 5 \,\mathrm{d}x$ . . . .

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x$ . . . .

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 3x^5 - 5x^3 \,\mathrm{d}x$ . . . .

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4 \,\mathrm{d}x$ . . . .

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ . . . .

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x \,\mathrm{d}x$ . . .

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x \,\mathrm{d}x$ . . .

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ . . . .

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ . . .

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ . . . .

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x(\cos x)^5 \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x| \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 12.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{2} t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t2^t\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{2} t\ln t\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^{1} t\arctan t\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 12.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{sh}(x)$ ....

b) $x \longmapsto \ln^2 x$ ....

c) $x \longmapsto (x \ln x)^2$ ....

012A

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin\theta$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin t$ ....

e) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 13.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos t$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan u$ ....

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$ ....

b) $x \in_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ....

c) $x \in_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ....

Fiche de calcul n° 14 0014A

Systèmes linéaires

Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 14.1

Résoudre dans ^{2}.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 14.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans ^{2} en fonction des valeurs du paramètre $a \in$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 14.3

Résoudre dans ^{3}.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 14.4

Résoudre dans ^{3}.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 14.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in$ et de paramètre $a \in$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \setminus\{-2; 3\}$. ....

Calcul 14.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in$ et de paramètres $(a, c) \in^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \setminus\{1\}$ ....

Calcul 14.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in$ et de paramètre $\lambda \in$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Fiche de calcul n° 15 **0017A**

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in {}^*$ et si $m \leqslant n$, on a

- $$\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 15.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 15.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 15.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 15.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 15.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 15.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 15.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 15.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 15.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Fiche de calcul n° 16

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 16.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 16.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ......

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 16.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 16.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 16.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 16.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 16.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 16.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....

Fiche de calcul n° 17

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 17.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in}$ définie par : $\forall n \in,\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 17.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in,\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme ....

b) u_3 ....

Calcul 17.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geqslant 1,\ v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :

a) v_3 ....

b) son sixième terme ....

Calcul 17.4 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in,\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Calcul 17.5 — Suite explicite.

Soit la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in,\ t_n = \ln\left(\dfrac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in^*$:

a) t_{2n} ....

b) t_{4n} ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 17.6 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) a_{1000} ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 17.7 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 17.8 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 17.9 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 17.10

Soit la suite $(u_n)_{n\in}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 17.11

Soit la suite $(v_n)_{n\in}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in,\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 17.12 — Suite de Fermat.

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in,\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles, ainsi que la formule de Taylor-Young.

Avertissement : Les développements limités peuvent se donner au « sens faible » (avec les petits $o(\cdot)$) ou « au sens fort » (avec les grands $O(\cdot)$). Volontairement, aucune de ces deux formes n'est imposée. Mais, pour des raisons de concision, une seule d'entre elles est donnée dans les éléments de correction de chaque question.

Développements limités

Calcul 18.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4 : $\sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 4 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 6 : $e^x \sin(x)$ ....

Calcul 18.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 4, en 0 : $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 6, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : $e^{e^{ix}}$ ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calcul 18.3 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en $\dfrac{\pi}{3}$: $\sin(\pi\cos(x))$ ....

b) À l'ordre 3, en $\dfrac{\pi}{4}$: $\tan(x)$ ....

c) À l'ordre 7, en $\dfrac{\pi}{2}$: $\cos(\pi\sin(x))$ ....

Développements asymptotiques

Calcul 18.4

Former le développement asymptotique, à la précision et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À la précision x^2, en 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) À la précision $\dfrac{1}{x^5}$, en $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) À la précision $\dfrac{1}{x^3}$, en $+\infty$: $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ ....

d) À la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$, en $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$ ....

Polynômes

Prérequis
Opérations sur les polynômes. Division euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1, \quad B = X - 1$ ....

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, \quad B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1, \quad B = X^3 + X^2 + 2$ ....

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, \quad B = 2X^3 - X^2 - X + 1$ ....

Calcul 19.2 — Avec des degrés arbitraires.

La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$ ....

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$, $B = (X - 2)^2$ ....

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$ ....

Calcul 19.3 — Avec des opérations.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$ ....

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ ....

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X - 2)^2$ ....

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$ ....

Calcul 19.4 — **Pour évaluer en un point.**

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. ....

b) Calculer $P(\mathrm{i})$. ....

Calcul 19.5 — **Pour évaluer en un point –** ***bis.***

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$. ....

b) Calculer $P(\sqrt{2})$. ....

Calcul 19.6 — **Pour évaluer en un point –** ***ter.***

Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$. ....

b) $P(\mathrm{i} + 1)$. ....

Calcul 19.7 — **Pour factoriser.**

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes ci-dessous, connaissant certaines racines :

a) $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$ où 1 est racine multiple. ....

b) $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$ où $1 + \mathrm{i}$ est racine. ....

c) $P = X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ où 1 est racine multiple et i est racine.

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

Calcul matriciel

Calcul 20.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 20.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in^*$), et où $\theta \in$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 20.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}, \qquad c_{ij} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}.$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

On rappelle que $\binom{i}{j} = 0$ quand $j > i$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $A \times C$ ....

Calcul 20.4 — **Deux calculs plus difficiles.**

Soient $n \in^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
En utilisant les matrices de l'exercice précédent, calculer les termes généraux suivants.

a) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ....

b) $\left[C^2\right]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 20.5 — **Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.**

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A ...

d) D ...

g) G ...

b) B ...

e) E ...

h) H ..

c) C ...

f) F ...

i) J ...

Calcul 20.6 — Matrices dépendant d'un paramètre.

Soit λ un paramètre réel. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Fiche de calcul n° 21

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées. Applications linéaires. Matrices. Rang.

Vecteurs

Calcul 21.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

f) $u = X^3 + X^2$, $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ ....

g) $u : x \mapsto \cos\Big(x + \dfrac{\pi}{3}\Big)$, $\mathcal{B} = (x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ ....

Calculs de rangs

Calcul 21.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n()$ ....

Calcul 21.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et applications linéaires

Calcul 21.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

e) $f : P \mapsto P(X + 2)$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ ....

Calcul 21.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

b) $f : P \mapsto P'$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}' = (1, X, X^2, X^3)$. ....

Fiche de calcul n° 22

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes), décomposition en éléments simples.

Séries géométriques, exponentielles, de Riemann

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 22.1 — Séries géométriques.

a) $\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 22.2 — Séries exponentielles.

a) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

Calcul 22.3 — Séries de Riemann.

a) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ ......

b) $\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ......

c) $\sum_{k\geqslant 6} \frac{1}{k}$ ......

Calcul 22.4 — Séries géométriques – ***bis.***

a) $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 3} \frac{\mathrm{i}^k}{7^{k-1}}$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 4} \frac{1}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^k}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 22.5

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$ ....

b) $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$ ....

c) $\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\sum_{k\geqslant 0} \arctan\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{1+(k+2)(k+1)}\right)$ ...

Séries géométriques dérivées

Prérequis

On pourra utiliser le fait que si $\alpha \in]-1,1[$, les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\alpha^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\alpha^{k-2},$$

appelées *séries géométriques dérivées*, convergent et ont pour somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha^{k-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3}.$$

Calcul 22.6 — Séries géométriques dérivées.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 22.7 — Séries géométriques dérivées – *bis*.

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ....