Interrogation écrite n° 3

jeudi 7 mars 2024

A

NOM : **PRÉNOM :**

1) Soit P et Q deux polynômes. Traduire mathématiquement (avec des quantificateurs) le fait que $P \in \mathrm{Vect}(1, X, Q)$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = {}^tM - M\}$$

est un espace vectoriel.

3) Décrire la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Sans montrer au préalable qu'il s'agit d'un espace vectoriel, déterminer une base de

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 3x + y = 2z + 2t \\ 2x - 2y = t \end{matrix} \right\}.$$

On donnera une base dont les vecteurs sont tous à coordonnées entières.

5) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}^3$. Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Interrogation écrite n° 3 B

jeudi 7 mars 2024

NOM : **PRÉNOM :**

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient M et A deux matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Traduire mathématiquement (avec des quantificateurs) le fait que $M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, A)$.

2) Montrer que l'ensemble

$$E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, (X^2+1)P' = 3(1-X)P + P(0)\}$$

est un espace vectoriel.

3) Décrire la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

4) Sans montrer au préalable qu'il s'agit d'un espace vectoriel, déterminer une base de

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{c} 4x + y = 2z + t \\ 3x - 2y = t \end{array} \right\}.$$

On donnera une base dont les vecteurs sont tous à coordonnées entières.

5) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f portant sur le noyau.