# Devoir surveillé n° 5

**samedi 16 mars 2024**

*La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.*

*Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.*

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

*Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements.* ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

## Exercice 1 : Questions en vrac

1) Factoriser au maximum le polynôme $P = 2X^4 + 11X^3 + 10X^2 - 21X - 18$.
   *On commencera par remarquer que $-3$ est racine de $P$.*

2) Sans montrer au préalable qu'il s'agit d'un espace vectoriel, détermine une base de
$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} 3x+2y = 2z+3t \\ 5x+4y = 8z+7t \end{matrix}\right\}.$$
   *On donnera une base dont les vecteurs sont tous à coordonnées entières.*

3) Déterminer l'équation [1] du plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,2,1)$ et $(7,-6,3)$.

4) Sans montrer au préalable qu'il s'agit d'un espace vectoriel, déterminer une base de
$$G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(1) = P(-1) \text{ et } P'(1) = P'(-1)\}.$$

## Problème 2 : Commutant d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme nous l'avons vu en cours, en général, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne commutent pas. A une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut donc s'intéresser à l'ensemble des matrices qui commutent avec elle : on note
$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AM = MA\}.$$
Cet ensemble est appelé *commutant* de $A$. Nous allons en étudier des propriétés dans ce problème.

### Partie A : Propriétés générales

On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) a) Justifier brièvement qu'une matrice est nulle si et seulement si la somme des carrés de ses coefficients est nulle.

   b) Écrire une fonction en Python, appelée `TestNulle`, qui prend en entrée une matrice quelconque, qui détermine son nombre de lignes et son nombre de colonnes, qui calcule la somme des carrés de ses coefficients et qui renvoie `True` si cette somme est nulle et `False` sinon.
   *On n'oubliera d'importer les éventuelles bibliothèques.*

   c) Écrire une fonction en Python, appelée `TestComm`, qui prend en entrée deux matrices carrées $A$ et $M$ (on sait qu'elles ont la même taille) et qui renvoie `True` si $M \in \mathcal{C}(A)$ et `False` sinon.
   *Elle devra utiliser la fonction précédente.*

1. C'est-à-dire trouver des réels $a$, $b$ et $c$ (on les choisira entiers) tels que $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz = 0\}$. L'équation du plan est alors $ax+by+cz=0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\mathcal{C}(\lambda \mathrm{I}_n)$.

4) a) Justifier que toute puissance de $A$ appartient à $\mathcal{C}(A)$.

   b) En déduire que, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(A) \in \mathcal{C}(A)$.

Remarquons que, en particulier, $\mathcal{C}(A)$ contient toutes les matrices colinéaires à $\mathrm{I}_n$.

5) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par produit matriciel, c'est-à-dire que, si $M \in \mathcal{C}(A)$ et $N \in \mathcal{C}(A)$, alors $MN \in \mathcal{C}(A)$.

6) Supposons [1] qu'il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PSP^{-1}$.

   a) Montrer que $M \in \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $P^{-1}MP \in \mathcal{C}(S)$.

   b) Supposons que $\mathcal{C}(S)$ admette une base $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors que la famille $(PB_1P^{-1}, PB_2P^{-1}, \ldots, PB_kP^{-1})$ est une base $\mathcal{C}(A)$.

## Partie B : Le cas des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $A$ n'est pas colinéaire [2] à $\mathrm{I}_2$. On se donne $M \in \mathcal{C}(A)$.

1) Supposons que, quel que soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, la famille $(X, AX)$ est liée.

   a) Justifier qu'il existe $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des réels tels que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   b) En déduire que $\alpha = \beta = \gamma$.

   c) En explicitant les coefficients de $A$, montrer que $A = \alpha \mathrm{I}_2$.

2) En déduire qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que la famille $(X_0, AX_0)$ est libre.

3) Nous souhaitons montrer dans cette question [3] que $(X_0, AX_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   a) Notons $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ et $AX_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que la matrice $B_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ est inversible.

   b) En utilisant la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = B_0^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$.

   On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(X_0, AX_0)$.

   c) Conclure.

4) Justifier qu'il existe $\lambda$ et $\mu$ des réels tels que $MX_0 = \lambda X_0 + \mu AX_0$.

5) Notons $T = M - \lambda \mathrm{I}_2 - \mu A$. Vérifier que $TX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T(AX_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   *On rappelle que* $M \in \mathcal{C}(A)$.

6) Montrer alors que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis que $T = \mathrm{O}_2$.

7) Conclure que $(\mathrm{I}_2, A)$ est une base de $\mathcal{C}(A)$.

---

1. Les matrices $A$ et $S$ sont alors dites semblables. En deuxième année, le but du chapitre de *diagonalisation*, sera justement de voir des critères et des méthodes pour trouver des matrices semblables qui sont diagonales. C'est aussi le cas dans la partie C de façon accompagnée.

2. Si $A$ est colinéaire à $\mathrm{I}_2$, alors on a déjà déterminé $\mathcal{C}(A)$ dans la partie précédente.

3. Ce fait sera totalement immédiat lorsque l'on aura vu la théorie de la dimension en utilisant le fait qu'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 2 est une base de cette espace vectoriel.

**Partie C : Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$**

Soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss[1].
*On présentera $P^{-1}$ sous la forme $\frac{1}{q}Q$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et $Q$ est une matrice à coefficients entiers.*

2) Notons $D = P^{-1}AP$. Écrire des instruction en Python qui calculent et affichent la matrice $D$.
*On commencera par implémenter $A$ et $P$. La matrice $P^{-1}$ sera obtenue via une commande Python. On n'oubliera d'importer les éventuelles bibliothèques.*

On admet[2] que l'on obtient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer $DM$ et $MD$ puis montrer que $M \in \mathcal{C}(D)$ si et seulement si il existe $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

4) En déduire une base de $\mathcal{C}(D)$ formée de matrices élémentaires[3].

5) En déduire une base de $\mathcal{C}(A)$.
*On pensera à utiliser la question A6b. Présenter la base sous la forme de produits matriciels suffira.*

**Partie D : Le cas des matrices diagonales**

On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices $D$ et $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P$ est inversible, $D$ est diagonale et $A = PDP^{-1}$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de $D$ (de sorte que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i$ est le coefficient d'indice $(i, i)$) et on suppose qu'ils sont deux à deux distincts.

1) a) Rappeler la formule générale donnant le coefficient d'indice $(i, j)$ du produit matriciel de deux matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Calculer $(DM)_{i,j}$ et $(MD)_{i,j}$.
   c) Montrer alors que $M \in \mathcal{C}(D)$ si et seulement si $M$ est une matrice diagonale.
   d) En déduire une base de $\mathcal{C}(D)$ formée de matrices élémentaires.

2) Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des réels. Expliciter la matrice $Q(D)$ lorsque

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

3) a) Montrer que, si $Q(D) = \mathrm{O}_n$, alors $Q$ est le polynôme nul.
   b) En déduire que $(\mathrm{I}_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4) Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$.
   a) Expliciter un polynôme $L_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $L_j(\lambda_j) = 0$ et, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!] \backslash \{j\}$, $L_j(\lambda_i) = 0$.
   b) Montrer alors que $L_j(D) = \mathrm{E}_{j,j}$, la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'indice $(j, j)$.
   *Cette question peut être traitée même si la question précédente n'a pas été réussie puisque la forme exacte du polynôme $L_i$ n'interviendra pas dans le raisonnement.*
   c) En déduire que $\mathrm{E}_{j,j} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$.

1. La méthode du pivot de Gauss devra être respectée à la lettre. Aucune interversion de lignes ne doit avoir lieu si le pivot est non nul. Aucune fraction ne doit apparaître dans les calculs sauf éventuellement à l'ultime étape.

2. C'est très facile à vérifier à la main mais il y a déjà suffisamment de produits matriciels à calculer dans ce sujet...

3. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, la matrice élémentaire élémentaire d'indice $(i, j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf d'indice $(i, j)$ qui vaut 1. On la note $\mathrm{E}_{i,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur $n$ ($n = 3$ dans cette partie et est quelconque dans les deux suivantes).

5) Conclure que $(\mathrm{I}_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(D)$.

6) En utilisant la question A6b, montrer enfin que $(\mathrm{I}_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base[1] de $\mathcal{C}(A)$.

## Exercice 3 : Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = 3 + 4X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = 2(2X+1)P_{n+1} - P_n.$$

1) Expliciter $P_2$ puis l'exprimer sous forme factorisée au maximum.

2) a) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en entrée $n$ et $x$ et qu'elle renvoie $P_n(x)$.

```
def polynome(x,n):
    U=1
    V = .......................
    for k in ................
        W=V
        V = ...................
        U = ...................
    return U
```

   b) Écrire des commandes Python qui représentent graphiquement $P_5$ sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrence linéaire d'ordre 2 telle que $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
   a) Expliciter $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 2n+1$.

4) En raisonnant par récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est un polynôme[2] de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{2n}$.

5) a) Montrer que, pour tous réels $a$ et $b$, $\sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b) - \sin(a-b)$.
   b) Exprimer $\sin(3x)$ comme combinaison linéaire de puissances de $\sin(x)$ (uniquement) pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Montrer par récurrence que

$$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n\big(-\sin^2(x)\big) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}.$$

   *On utilisera le moment venu, le fait (que l'on justifiera) que* $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$.

   d) Justifier que $-\sin^2$ est bijective de $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans un intervalle à préciser.
   e) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est l'unique polynôme qui vérifie la relation de la question 5c.

6) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $x_k = -\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
   a) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $x_k$ est racine de $P_n$.
   b) Justifier que $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts.
   c) En déduire une factorisation (au maximum) de $P_n$.
   d) Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

1. Ainsi, on vient de montrer que, $(\mathrm{I}_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(A)$ lorsque $n = 2$ ou lorsque $n \geqslant 3$ et $A$ est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Mais l'exemple de la partie C montrer que, si les coefficients diagonaux ne sont pas deux à deux distincts, alors ce n'est pas une base de $\mathcal{C}(A)$ (c'est le chapitre de dimension qui nous le dira bientôt : $\mathcal{C}(A)$ dans la partie C possède une base contenant 5 vecteurs tandis que $(\mathrm{I}_n, A, A^2)$ n'est qu'une famille libre à 3 vecteurs donc ne peut pas être une base).

2. Lisez bien : il y a trois choses à montrer : que $P_n$ est un polynôme, qu'il est de degré $n$ et que son coefficient dominant est $2^{2n}$.