Devoir surveillé n° 3

samedi 9 décembre 2023

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) On dispose d'une sac qui contient 6 billes rouges et 3 billes bleues. On effectue 4 tirages successifs **avec** remise dans ce sac. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes rouges obtenues lors de ces 4 tirages.
   a) Sans calculs, déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.
   b) En déduire $\mathbb{P}(X=2)$ sous la forme d'une fraction irréductible.
2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Vérifier que $Y = 2^X$ et $Z = \binom{n}{X}$ sont des variables aléatoires réelles finies et montrer, par le calcul, que $\mathbb{E}(Y) = 2\,\mathbb{E}(Z)$.
   On ne déterminera pas les lois de Y et Z au préalable.
3) Soient E et F des ensembles non vides.
   a) Soit f une injection de E dans F. On se donne $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$.
   Montrer que, si $f(A) = f(B)$, alors $A = B$.
   b) Soit $g : E \longrightarrow E$ telle que $g \circ g$ est une bijection de E dans E.
   Montrer que g est une bijection de E dans E.
4) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(x)\,(2-\ln(x))$ réalise une bijection de $]0\,;e]$ dans $]-\infty\,;1]$ et expliciter sa réciproque.

Exercice 2 : Un cas particulier du processus de Bienaymé Galton-Watson

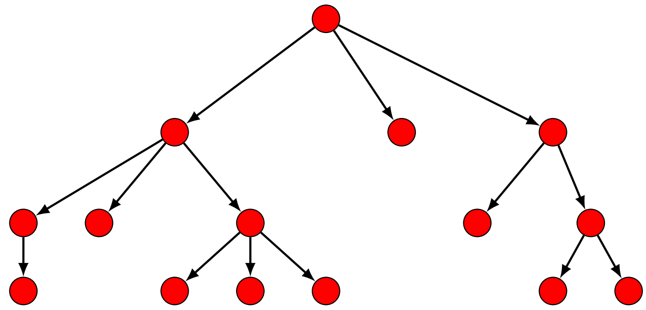
Le processus de Bienaymé-Galton-Watson est un modèle probabiliste permettant de décrire des dynamiques de populations. On commence avec un individu, appelé ancêtre, qui forme à lui seul la génération 0. Ses enfants forment la génération 1, ses petits enfants la génération 2, ses arrières petits enfants la génération 3, etc. On appelle lignée l'ensemble des individus de toutes les génération.

On s'intéresse au cas particulier suivant : chaque individu, quelle que soit sa génération, peut avoir 3 descendants avec probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendants avec probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec probabilité $\frac{1}{8}$.

On admet que l'on peut modéliser cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini[1] (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que les nombres d'enfants des individus sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Pour cela, on se limite à un (grand) nombre de générations.

Un exemple. *L'arbre généalogique suivant s'intéresse à trois générations.*



L'ancêtre a eu 3 descendants si bien que la génération 1 contient 3 individus. Ils ont eu respectivement 3, 0 et 2 descendants si bien que la génération 2 contient 5 individus. La génération 3 contient, quant à elle, 6 individus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que le lignée est éteinte à la génération n lorsqu'il n'y a aucun individu à la génération n. Cela signifie qu'aucun individu d'une certaine génération avant (au sens strict) la $n^{\text{ième}}$ n'a eu d'enfants. On note E_n l'événement « la lignée est éteinte à la $n^{\text{ième}}$ génération » et on pose $p_n = \mathbb{P}(E_n)$.

1) a) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui ne prend pas d'arguments et qui renvoie 0 avec probabilité $1/8$, 1 avec probabilité $3/8$, 2 avec probabilité $3/8$ et 3 avec probabilité $1/8$.

```
import ....................
def nb_descendants():
    X=....................#Un entier aléatoire entre 1 et 8 (
    inclus).
    if X==1:
        return ............
    elif 2<=X<=4:
        return ............
    ......................
        return ............
    ......................
        return ............
```

b) Recopier et compléter (à l'aide de la fonction de la question précédente) la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en entrée n et qu'elle renvoie une liste telle que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de la liste est le nombre d'individus à la génération k.

```
def generations(n):
    L=............................#La liste [1,0,...,0] avec
    n coordonnées valant 0
    for k in range(n):
        for i in range(..........):
            L[k+1]................
    return L
```

On pourra remarquer que le nombre d'individus à une génération donnée est égal à la somme des nombres de descendants de tous les individus de la génération précédente.

2) Calculer p_0 et p_1.

Pour tout $k \in [\![0\,;3]\!]$, introduisons l'événement A_k : « l'ancêtre a k enfants ». On a alors $\mathbb{P}(A_0) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{8}$.

3) Supposons que l'ancêtre a eu deux enfants. Cela sépare l'arbre généalogique en deux groupes : les descendants de son premier enfant et les descendants de son second enfant. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $E_{1,n}$ l'événement « il n'y a plus de descendants du premier enfant à la génération n » et $E_{2,n}$ l'événement « il n'y a plus de descendants du second enfant à la génération n ».

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de phrases uniquement, justifier que $\mathbb{P}_{A_2}(E_{1,n+1}) = \mathbb{P}_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n$.

b) En déduire que $\mathbb{P}_{A_2}(E_{n+1}) = p_n^2$.
On pourra s'aider des phrases mais on attend aussi cette fois des arguments probabilistes rigoureux pour conclure.

4) En procédant de façon analogue (et en justifiant très brièvement), donner $\mathbb{P}_{A_0}(E_{n+1})$, $\mathbb{P}_{A_1}(E_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{A_3}(E_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p_n + \frac{3}{8}p_n^2 + \frac{1}{8}p_n^3.$$

6) Vérifier que cette formule reste vraie lorsque $n = 0$.

7) Posons $f : x \longmapsto \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{1}{8}x^3$ et $g : x \longmapsto f(x) - x$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = f(p_n)$.

   a) Déterminer deux réels a et b tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{8}(x-1)(x^2 + ax + b).$$

   b) En déduire le tableau de signe complet de g limité au segment $[0\,;1]$.
   On notera α et β les deux racines du trinôme $x \longmapsto x^2 + ax + b$ et on vérifiera que $\alpha < 0 < \beta < 1$.

   c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant \beta$.

   d) En déduire les variations de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   e) Montrer que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$. Comment interpréter cette limite ?

Exercice 3 : Obtenir une boule rouge

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience aléatoire suivante : on considère $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'urne k contient une boule rouge et k boules bleues numérotées de 1 à k (donc elle contient $k+1$ boules au total). On commence par tirer une boule dans l'urne n. Si on tire la boule rouge, l'expérience s'arrête. Si on tire une boule bleue et que k désigne son numéro, alors on effectue un nouveau tirage mais cette fois dans l'urne $k-1$. On recommence ce protocole [1] tant que l'on a pas obtenu une boule rouge.

On suppose que l'on a construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience (on ne cherchera pas à l'expliciter). On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'une boule rouge.

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note :

- pour tout $j \in [\![1\,;i]\!]$, $B_{i,j}$ l'événement « tirer la boule j dans l'urne i ».
- R_i l'événement « tirer la boule rouge dans l'urne i ».

Un premier exemple. *On suppose que $n = 10$ et que l'expérience se déroule ainsi :*

- *On tire la boule bleue numérotée 8 dans l'urne 10. Le tirage suivant aura donc lieu dans l'urne 7.*
- *On tire la boule bleue numérotée 5 dans l'urne 7. Le tirage suivant aura donc lieu dans l'urne 4.*
- *On tire la boule bleue numérotée 3 dans l'urne 4. Le tirage suivant aura donc lieu dans l'urne 2.*
- *On tire la boule rouge dans l'urne 2.*

L'expérience s'arrête : il a fallu 4 tirages pour obtenir une rouge. Les événements $B_{10,8}$, $B_{7,5}$, $B_{4,3}$, R_2 et $[X_{10} = 4]$ sont réalisés.

Un deuxième exemple. *On suppose que $n = 5$ et que l'expérience se déroule ainsi :*

- *On tire la boule bleue numérotée 3 dans l'urne 5. Le tirage suivant aura donc lieu dans l'urne 2.*
- *On tire la boule bleue numérotée 1 dans l'urne 2. Le tirage suivant aura donc lieu dans l'urne 0.*
- *On tire (forcément) la boule rouge dans l'urne 0.*

L'expérience s'arrête : il a fallu 3 tirages pour obtenir une rouge. Les événements $B_{5,3}$, $B_{2,1}$ et $[X_5 = 3]$ sont réalisés.

1. A chaque fois que l'on tire une boule bleue et que son numéro est j, le tirage suivant s'effectue dans l'urne $j-1$.

1) Écrire une fonction en Python qui prend en argument n et qui renvoie une réalisation de X_n.
C'est-à-dire, on commence par tirer un entier uniformément entre 0 et n (0 pour la boule rouge et 1 à n pour les boules bleues). Et on continue tant que l'on n'a pas obtenu 0 avec le protocole suivant : si, à un tirage, on tire la boule numérotée k alors, au tirage suivant, on choisit un entier uniformément entre 0 et $k-1$. La fonction renvoie le nombre de tirages.

2) On suppose dans cette question uniquement que $n = 1$.
   a) Exprimer les événements $[X_1 = 1]$ et $[X_1 = 2]$ en fonction des événements $B_{1,1}$ et R_1.
   b) En déduire que X_1 suit une loi usuelle puis donner, sans démonstration, $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

3) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$.
   a) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonctions des événements $B_{1,1}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, R_1 et R_2.
   b) En déduire la loi de X_2.
   c) Calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

4) Déterminer $X_n(\Omega)$.

5) Calculer $\mathbb{P}(X_n = 1)$.

6) a) Exprimer l'événement $[X_n = n+1]$ en fonction des événements des familles $(B_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ et $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(X_n = n+1) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention d'une boule rouge lorsque le premier tirage a lieu dans l'urne k. On admet que les formules des questions 4, 5 et 6 restent valables en remplaçant n par k.

7) Soit $j \in [\![2, n+1]\!]$.
   a) Justifier à l'aide de phrases que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}_{B_{n,k}}(X_n = j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j > k+1 \\ \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) & \text{si} \quad j \leqslant k+1 \end{cases}$$

   b) Que vaut $\mathbb{P}_{R_n}(X_n = j)$?

8) Montrer alors soigneusement que

$$\forall j \in [\![2, n+1]\!], \qquad \mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=j-1}^{n} \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1).$$

9) Supposons que $n \geqslant 2$.
   a) Vérifier par le calcul que

$$\forall j \in [\![1, n+1]\!], \qquad (n+1)\mathbb{P}(X_n = j) - n\mathbb{P}(X_{n-1} = j) = \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1).$$

   On utilisera la question précédente pour $j \in [\![2\,;n]\!]$ mais les cas où $j = 1$ et $j = n+1$ devront être traités séparément.
   b) En déduire que

$$(n+1)\mathbb{E}(X_n) - n\mathbb{E}(X_{n-1}) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + 1.$$

10) Montrer enfin que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

En 1981, le groupe Genesis [1] se réunit pour composer leur onzième album. Pour l'une des chansons, ils composent trois motifs [2] qu'ils repèrent par les lettres A, B et C. L'enchainement des motifs finit par former la suite ABACAB. Trouvant ce terme accrocheur, ils décident d'appeler leur chanson (et même tout l'album) Abacab... bien que, selon Tony Banks, la version finale de la chanson forme plutôt l'enchainement ACACACUCUBUBUGA (avec deux motifs supplémentaires repérés par les lettres G et U).

1) Combien y a-t-il de mots de 6 lettres qui sont une anagramme de ABACAB ? Et combien y a-t-il de mots de 15 lettres qui sont une anagramme de ACACACUCUBUBUGA ?

   On simplifiera au maximum le premier nombre demandé et on donnera le résultat du second nombre demandé sous la forme d'un produit de nombres premiers inférieurs à 15 (c'est-à-dire un produit ne faisant intervenir que 2,3,5,7,11,13).

Plus généralement, donnons-nous p et n des entiers naturels non nuls. On dit qu'un morceau de musique a une *structure à p motifs à partir de n distincts*, lorsqu'il est construit comme l'enchainement ordonné de p motifs parmi n motifs donnés et distincts. Pour simplifier, on repère plutôt les motifs distincts par des entiers de 1 à n et on peut alors coder la structure de la chanson à l'aide d'un p-uplet $(m_1, \ldots, m_p)$ d'éléments de $[\![1\,;n]\!]$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, m_i est le numéro repérant le $i^{\text{ième}}$ motif de la structure [3].

À nous de jouer ! On souhaite créer une chanson dont la structure est à p motifs à partir de n motifs distincts que l'on vient de composer. Il s'agit donc de créer des p-uplets dont les éléments sont les nombres repérant ces n motifs.

2) a) Combien peut-on créer de chansons différentes (sans forcément utiliser tous les motifs) ?

   b) Supposons que $n \geqslant 2$. Combien peut-on créer de chansons différentes sans utiliser le motif 1 (et sans forcément utiliser tous les motifs) ?

   c) Supposons que $n \geqslant 2$. Combien peut-on créer de chansons différentes en utilisant forcément le motif 1 (mais pas forcément tous les motifs) ?

   d) Supposons que $n \geqslant 3$. Combien peut-on créer de chansons différentes en utilisant forcément le motif 1 et le motif 2 (mais pas forcément tous les motifs) ?

3) Supposons que $p \leqslant n$.

   a) Combien peut-on créer de chansons différentes où chaque motif est présent au plus une fois ?

   b) Supposons que les n motifs ont tous des durées distinctes. Combien peut-on créer de chansons différentes où les motifs sont présents au plus une fois mais dans un ordre strictement croissant de durée ?

4) Dans toute cette question, on impose que chaque motif composé apparaisse au moins une fois dans la chanson finale.

   a) Combien y en a-t-il si $p = n$?

   b) Supposons que $p = n + 1$. Justifier qu'il y a alors $\dfrac{n}{2}(n+1)!$ chansons possibles.

   On remarquera que, dans cette situation, un motif est répété exactement deux fois et les autres une seule fois. La formule demandée n'est pas directe et s'obtient après simplification.

---

1. En 1981, Genesis est composé de Tony Banks (aux claviers), Phil Collins (au chant et à la batterie) et de Mike Rutherford (aux guitares). Pionnier du rock progressif dans les années 70 (avec notamment le génial Peter Gabriel aux commandes jusqu'en 1975), ils amorcent un tournant plus pop/rock dans les années 80 qui fait d'eux des stars planétaires. Ils ont vendu plus de 150 millions d'albums. Phil Collins, à lui seul, a vendu 150 millions d'albums.

2. Les motifs sont des parties musicales qui sont assemblées pour former une chanson. La plupart des chansons pop suivent la structure ABABAB puisqu'elles alternent un motif A (couplet) et un motif B (refrain). Mais on peut tout imaginer, par exemple : CABABDABE si on lui ajoute une introduction C, une conclusion E et un pont D.

3. Par exemple, pour la chansons Abacab de Genesis (dont la structure finale, ACACACUCUBUBUGA, est à 15 motifs à partir 5 distincts), si on code les A par des 1, les B par des 2, les C par des 3, les G par des 4 et les U par des 5, on obtient le 15-uplet $(1, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 3, 5, 2, 5, 2, 5, 4, 1)$.

c) Supposons que $p = n+2$. Justifier qu'il y a alors $\dfrac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$ chansons possibles.

On remarquera que, dans cette situation, un motif est répété exactement trois fois et les autres une seule fois ***ou bien*** *deux motifs sont répétés exactement deux fois et les autres une seule fois. La formule demandée n'est pas directe et s'obtient après simplification.*

Pour traiter le cas général, pour tous $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on introduit $S_{n,p}$ le nombre de chansons ayant une structure à p motifs à partir de n motifs donnés, distincts et présents au moins une fois dans la structure (on admet que ce nombre ne dépend pas des n motifs donnés tant qu'ils sont distincts et présents au moins une fois).

d) Que vaut $S_{n,p}$ lorsque p et n sont des entiers tels que $1 \leqslant p < n$?

e) Que vaut $S_{1,p}$ lorsque $p \in \mathbb{N}^*$?

f) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![2\,;p+1]\!]$. Justifier, à l'aide de phrases, que

$$S_{n,p+1} = n\big(S_{n,p} + S_{n-1,p}\big).$$

On pourra remarquer que se donner un $(p+1)$-uplet d'éléments d'un ensemble E contentant tous les éléments de E revient à choisir le premier élément du $(p+1)$-uplet, puis à choisir les p autres.

g) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![2\,;p+1]\!]$ et $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. Vérifier, par le calcul uniquement [1], que

$$n\left((-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p + (-1)^{n-1-k}\binom{n-1}{k}k^p\right) = (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{p+1}.$$

h) Montrer alors par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$H(p) : \text{« } \forall n \in [\![1\,;p]\!],\ S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p \text{ »}$$

est vraie.

On utilisera les questions 4e, 4f et 4g en faisant bien attention au fait que la formule de la question 4f n'est pas valable pour $n = 1$.

1. ... donc pas via un raisonnement par récurrence !