Devoir surveillé n° 2

jeudi 9 novembre 2023

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x) \leqslant n(\sqrt[n]{x}-1).$$

2) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{3}{\ln(2-\sqrt[5]{x})}$$

et calculer sa dérivée.

3) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = -3u_n + 8.$$

4) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n^7} - 7n^7 + \sqrt[7]{n}(\ln(n))^{77}}{n^7 + n^{7!}(\pi/7)^n + \sqrt{7}\cos(e^{n!})}.$$

5) Déterminer par le calcul trois entiers non nuls a, b et c tels[1] que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \binom{j}{i}\frac{(-1)^i}{2^{j-1}} = \frac{1}{c}\left(a - \left(-\frac{1}{b}\right)^n\right).$$

1. Bien sûr a, b, c ne peuvent pas dépendre de n (puisqu'ils sont introduits avant le « $\forall n$ »).

Exercice 2 : Une étude de fonction

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \big(\sin(x)\big)^{\cos(x)}$.

1) Justifier que f est définie sur $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi\,;(2k+1)\pi[$. Quel est le signe de f sur A ?

2) Montrer que f est 2π-périodique sur A.

On étudie désormais f sur l'intervalle $[0\,;\pi[$.

3) Calculer les limites de f en 0^+ et π^-. Que dire alors de la continuité de f en 0 ?

4) On pose $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - x(\ln(x)+1)$.
   a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0\,;1]$.
   b) En déduire le signe de $g(\sin(x))$ pour tout $x \in]0\,;\pi[$.
   On précisera bien toutes les valeurs de x qui annulent $g(\sin(x))$.

5) a) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et que, pour tout $x \in]0\,;\pi[$, $f'(x) = g(\sin(x))f(x)$.
   b) Construire le tableau de variations de f.

6) a) Calculer la limite de $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto -x^2\ln(x)$ en 0^+.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $1-\cos(x) \leqslant \sin^2(x)$.
   c) En déduire que
   $$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad 1 \leqslant \big(\sin(x)\big)^{\cos(x)-1} \leqslant e^{\varphi(\sin(x))}.$$
   d) Vérifier que, pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \big(\sin(x)\big)^{\cos(x)-1} \times \frac{\sin(x)}{x}.$$
   e) En déduire que f est dérivable en 0^+ et que $f'(0)=1$.

7) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0\,;\pi[$.
   On fera apparaître les tangentes en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ et des asymptotes.

8) Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in [0\,;\pi[$ tel que $y = \big(\sin(x)\big)^{\cos(x)}$.

9) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui représente la courbe représentative de f sur $D_f \cap [-2n\pi; (2n+1)\pi]$.
   On utilisera une boucle `for` pour représenter $\mathscr{C}_f$ sur chaque intervalle $[2k\pi\,;2k\pi+3]$, $k \in [\![-n\,;n]\!]$.

Exercice 3 : Approximation d'une racine carrée

On fixe $a \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et on considère deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $p_0 = q_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = p_n + aq_n \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} = p_n + q_n.$$

1) a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant q_n \geqslant 2^n$.
   b) En déduire les limites des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \neq 0$ et on peut donc poser $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

2) a) Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle prenne en entrée a et n et pour qu'elle renvoie une liste contenant $r_0, r_1, \dots, r_n$.

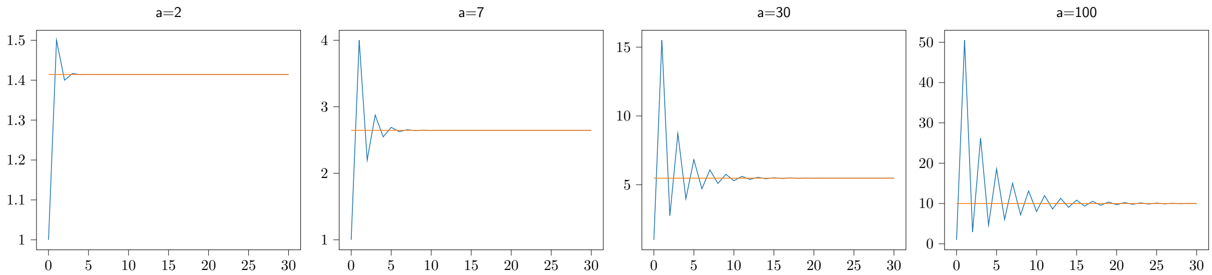
```
def suite_r(a,n):
    P=..............#Une liste avec n+1 fois la valeur 1
    Q=..............#Une liste avec n+1 fois la valeur 1
    ................................
        P[k+1]=.....................
        Q[k+1]=.....................
    R=[P[k]/Q[k] ....................]
    ......................
```

Dans cette fonction, on crée d'abord les listes `P` *et* `Q` *contenant les* $n+1$ *premières valeurs des suites* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avant d'en déduire la liste* `R` *des* $n+1$ *premières valeurs de* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Quelles instructions en Python importent une bibliothèque contenant des commandes permettant de faire des représentations graphiques ?

c) Écrire des instruction Python qui représentent graphiquement $r_0, \dots, r_{30}$ et qui superpose au tracé la droite d'équation $y = \sqrt{a}$.
On utilisera impérativement la fonction de la question précédente (même si elle n'a pas été réussie).

d) Voici ce que l'on obtient pour quelques valeurs de a.



Que peut-on conjecturer ?

Le but des questions suivantes est de montrer, de deux façons différents, la conjecture précédente.

3) **Une première méthode.**

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+2} = 2q_{n+1} + (a-1)q_n$.

b) En déduire (sans faire de raisonnement par récurrence) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left((1+\sqrt{a})^{n+1} - (1-\sqrt{a})^{n+1}\right).$$

c) En déduire une expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On utilisera la question précédente et la définition de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Justifier que $p_n \sim \dfrac{(1+\sqrt{a})^{n+1}}{2}$ et $q_n \sim \dfrac{(1+\sqrt{a})^{n+1}}{2\sqrt{a}}$.

e) En déduire la limite de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) **Une deuxième[1] méthode.** On définit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+a}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$ de telle sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = f(r_n)$.

a) Expliciter r_0, r_1, r_2 et r_3.

b) Justifier que f et $h = f \circ f$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+$. Expliciter $h(x) = f \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et construire son tableau de variations limité au segment $\left[1\,;\frac{1+a}{2}\right]$.
On fera apparaître le point d'abscisse $\sqrt{a}$ *après avoir justifié que* $\sqrt{a} \in \left[1\,;\frac{1+a}{2}\right]$.

d) A l'aide du tableau de variations, justifier que $h([1\,;\sqrt{a}[) \subset [1\,;\sqrt{a}[$ et $h(]\sqrt{a}\,;\frac{1+a}{2}]) \subset]\sqrt{a}\,;\frac{1+a}{2}]$.

1. Aucun des résultat obtenu dans la question 3 ne doit être utilisé dans toute cette question.

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} \in]1\,;\sqrt{a}]$ et $r_{2n+1} \in \left]\sqrt{a}\,;\frac{1+a}{2}\right]$.
On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{2n+2} = h(r_{2n})$ *et* $r_{2n+3} = h(r_{2n+1})$.

f) Déterminer le signe de $g : x \longmapsto h(x) - x$ sur $\left[1\,;\frac{1+a}{2}\right]$.

g) En déduire les variations des suites $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

h) Montrer enfin que ces deux suites convergent vers un même réel à préciser. Retrouver alors la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Une suite récurrente sous-linéaire d'ordre 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

Par récurrence immédiate (que l'on ne demande pas de justifier), pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$

1) Dans cette question seulement on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
   a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ qui vérifie $\ell = \sqrt{2\ell}$.
   c) Aboutir à une contradiction.

2) a) Justifier brièvement qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 1$.
   b) En déduire que $u_{n_0+2} > 1$, $u_{n_0+3} > \sqrt{2}$ et $u_{n_0+4} > \sqrt{2}$.
   c) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0 + 3$, $u_n > \sqrt{2}$.

On vient de montrer que, quelles que soient les valeurs (strictement positives) de u_0 et u_1, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite dépassent strictement $\sqrt{2}$. Ainsi, pour simplifier les notations dans la suite, on supposera désormais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |u_n - 2|$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}.$$
   b) Justifier que $2 + \sqrt{2\sqrt{2}} > 3$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$.

4) On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = v_0$, $w_1 = v_1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{3}$.
   a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de n et de deux réels indépendants de n (que l'on ne cherchera pas à exprimer en fonction de v_0 et v_1).
   b) En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant w_n$.
   d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

5) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle prenne en entrée trois réels x, y et ε strictement positifs et qu'elle renvoie le premier rang n tel que $|u_n - 2| \leqslant \varepsilon$ lorsque $u_0 = x$ et $u_1 = y$.

```
def PremierRang(x,y,eps):
    u,v=x,y
    n = .........................
    while .....................
        n = .....................
        aux = ...................
        v = .....................
        u = .....................
    return ....................
```