Devoir surveillé n° 1

samedi 7 octobre 2023

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Écrire la négation de la proposition suivante (en faisant apparaître le symbole $\Rightarrow$) :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(x < y < x+\delta \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) > \varepsilon \right).$$

2) Résoudre l'inéquation $2 - x + \sqrt{2x-1} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour résoudre cette inéquation.

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. Exprimer[1], à l'aide de factorielles et de puissances uniquement, le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{p} (2k+1)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=3}^{2n} (-1)^{7k+1} \binom{2n}{k-1}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par le calcul que

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^2}{2j-1} = \frac{n(n-1)(n+1)}{18}.$$

6) Montrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour montrer cette inégalité.

1. Le résultat a été vu en cours mais on attend une démonstration.

Exercice 2 : Ceci n'est pas un carré

On dit qu'un entier naturel p est un **carré**[1] si il existe un entier naturel k tel que $p = k^2$.

On dit qu'un entier naturel p est un **non carré** s'il n'est pas un carré.

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Écrire avec des quantificateurs le fait que p est un non carré.

2) a) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Combien y a-t-il d'entiers naturels non carrés compris (strictement forcément) entre les carrés $(k-1)^2$ et k^2.

   b) Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. En déduire le nombre d'entiers naturels non carrés qui sont strictement inférieurs à p^2.
   On pourra exprimer ce nombre sous forme de somme avant de la calculer (et de présenter le résultat sous forme factorisée au maximum).

3) Soit p un entier naturel non carré. Notons $n = p - \lfloor\sqrt{p}\rfloor$. Justifier que p est le $n^{\text{ième}}$ entier naturel non carré.

4) a) Que fait la commande `int(p**(1/2))==p**(1/2)` lorsque `p` désigne un entier naturel implémenté en Python ?

   b) Écrire une fonction en Python, appelée `ListeNonCarres` qui :
   - prend en argument `n`, un entier naturel non nul (on ne prévoit pas de message d'erreur si l'utilisateur fournit un argument qui n'en est pas un).
   - construit une liste vide `L` et stocke `0` dans une variable `p`,
   - tant que la liste `L` n'est pas de longueur `n`,
     — augmente la valeur de `p` de `1`,
     — ajoute `p` à liste `L` si `p` n'est pas un carré (et ne fait rien sinon).
   - renvoie la liste `L`.

   Justifier brièvement que cette fonction renvoie la liste des `n` premiers entiers naturels non carrés.

   c) Une fois la fonction `ListeNonCarres` éxécutée, on écrit `L=ListeNonCarres(1000)`. Comment accéder au $1000^{\text{ième}}$ entier naturel non carré en une seule commande ?

   d) La fonction suivante prend en entrée un entier naturel `n`. La recopier et la compléter afin qu'elle renvoie la somme des `n` premiers entiers naturels non carrés.

```
def SommeNonCarres(n):
    L=ListeNonCarres(n)
    p = ......................#Longueur de L
    S = ......................
    ........................
        S = ..................
    ........................
```

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit l'ensemble $A_n = \{r \in \mathbb{N}^* \,|\, r^2 < n + r\}$.

   a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $r \in A_n$ si et seulement si $r^2 < n + r - \dfrac{1}{4}$.

   b) Résoudre l'inéquation $x^2 < n + x - \dfrac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (à n fixé).

   c) Justifier que $\frac{1}{2} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$.

   d) En déduire que A_n admet pour maximum $r_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor$.

   e) Expliquer, avec des phrases et à l'aide d'une droite graduée, pourquoi il y a exactement r_n carrés non nuls inférieurs strictement à $n + r_n$. En déduire que le $n^{\text{ième}}$ non carré est $p_n = n + r_n$.

   Nous venons donc de montrer qu'il y a exactement r_n carrés et n non carrés entre 1 et p_n.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Exprimer la somme S_n des n premiers non carrés comme différence de deux sommes.

1. On parle aussi de carré *parfait* mais on n'utilisera pas ce terme afin d'alléger les notations (puisque l'on ne va manipuler que des entiers).

b) En déduire[1] que,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{r_n(3n+1-r_n^2)}{3}.$$

c) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = k^2$. Déterminer alors trois réels a, b et c tels que $S_n = \dfrac{k(k+1)(ak^2+bk+c)}{6}$. Peut-on encore factoriser le trinôme ak^2+bk+2 en produit de deux polynômes de degré 1 ?

Exercice 3 : Somme géométrique dérivée

L'objectif de cet exercice est de montrer, de quatre manières différentes et indépendantes, que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2} \qquad (\star)$$

1) ***Méthode 1 :*** On fixe $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrer la formule $(\star)$ par récurrence.

2) ***Méthode 2 :*** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction[2]

$$f_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

   a) Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b) Donner une autre expression de $f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   C'est juste du cours donc on ne demande pas de démonstration.

   c) En déduire la formule $(\star)$.

3) ***Méthode 3 :*** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   a) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$(1-x)^2 kx^{k-1} = a_k + b_k + c_k + d_k,$$

   avec

$$a_k = (k-1)x^{k-1} - kx^k, \quad b_k = (k+1)x^{k+1} - kx^k, \quad c_k = x^{k-1} - x^k \quad \text{et} \quad d_k = x^k - x^{k+1}.$$

   b) Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$.

   c) Retrouver alors la formule $(\star)$.

4) ***Méthode 4 :*** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   a) Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} x^{k-1}$ en fonction de n et de j.

   b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} x^{k-1}$ en fonction de n.

   c) Retrouver alors la formule $(\star)$.

5) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. après calculs des sommes, développements et factorisations (ce n'est pas immédiat).
2. Il s'agit donc de $f_n : x \longmapsto 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$ (mais on préférera bien sûr l'écriture avec le symbole $\sum$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, notons $P(n)$ la propriété suivante :

> Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels positifs, alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n$.

Le but de cet exercice est de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $P(n)$ est vraie. Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité arithmético-géométrique.

1) Montrer que $P(2)$ est vraie.

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On cherche à montrer que $P(n+1)$ est vraie. Donnons-nous $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des réels positifs. Si l'un d'entre eux est nul, alors leur produit aussi et $P(n+1)$ est vraie. Supposons donc qu'ils sont tous non nuls et posons

$$x = \frac{\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i} - 1.$$

   a) En utilisant l'inégalité de Bernoulli montrée dans la question 6 de l'exercice 1 (on admet qu'elle reste vraie lorsque $x \in [-1\,;0[$), prouver que

$$(1+x)^{n+1} \geqslant \frac{a_{n+1}}{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

   b) En remarquant que

$$(1+x)^{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{n+1} \Big/ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{n+1},$$

   montrer que $P(n+1)$ est vraie.

3) Conclure.

4) On dit que la quantité $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ est la moyenne géométrique de $a_1, \ldots, a_n$ tandis que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ est appelée moyenne arithmétique de ces nombres. Pour votre moyenne générale du semestre, préférez-vous que je calcule la moyenne arithmétique de vos notes ou la moyenne géométrique ?

5) **Une première application :** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

6) **Une deuxième application :** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3})\cdots(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^n}}.$$

On commencera par multiplier le produit par $1 = \sqrt{1}-\sqrt{0}$.