# Devoir maison n° 9

**À rendre le samedi 20 janvier 2024**

## Exercice 1 : Une étude de fonction

**Extrait du DS n° 4 de l'an passé.**

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

   b) En déduire que $f$ est prolongeable par continuité en $0$. On précisera $f(0)$.

   c) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^t \, dt$.

   a) Justifier que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{x^3}{3} e^x.$$
   *On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\dfrac{x^3}{3} e^x \leqslant h(x) \leqslant 0$.*

   b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -\int_0^x t e^t \, dt = e^x(1 - x) - 1.$$

   c) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{h(x)}{2} = e^x(1 - x) - 1 + \frac{x^2}{2} e^x.$$

   d) Vérifier que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2 e^x \left( \frac{e^{-x}}{x^2} h(x) - 1 \right).$$

   e) En déduire que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3) a) A l'aide de la question 2b, montrer que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   *On montrera séparément la stricte décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ avant de conclure.*

   b) Déterminer le tableau de variation complet (avec limites en $-\infty$ et en $+\infty$ notamment) de $f$ sur $\mathbb{R}$.
   *On fera apparaître la valeur en $0$.*

   c) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -x$ pour asymptote en $-\infty$. On précisera leurs positions relatives.

   d) Quelle est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $0$ ?

   e) Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.
   *On fera apparaître les asymptotes en $\pm\infty$ et la tangente en $0$.*

4) a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $u(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.

   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

   c) Montrer que $u$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$.

d) En déduire que $|f'| \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

5) On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{e^{u_n} - 1}.$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \neq 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n > 0$.

b) Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ que l'on explicitera.
*On fera apparaître ce point sur le tableau de variations de la question 3b.*

c) Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

*On pourra commencer par montrer que* $u_1 \in \,]0\,;1[$.

e) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

f) Soit $\varepsilon \in \,]0\,;1[$. Déterminer, en fonction de $\varepsilon$, un entier $n_\varepsilon$ tel que $|u_{n_\varepsilon} - \alpha| \leqslant \varepsilon$.

g) Est-ce que $n_\varepsilon$ peut servir sérieusement d'approximation de $\alpha$ à $\varepsilon$-près ? Que proposer de mieux en utilisant le fait que $\dfrac{1}{2} \leqslant \ln(2)$ ?

h) Il n'est pas aisé (voire impossible) de trouver une formule explicite pour le plus petit indice des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont une approximation de $\alpha$ à une précision donnée. Mais on peut s'aider de l'outil informatique. A l'aide d'une boucle `while`, écrire une fonction en Python qui prend en entrée $\varepsilon$ et qui renvoie le premier indice $n$ tel que $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ lorsque $u_0 = 1$.
*Les élèves n'ayant pas trouvé la valeur explicite de $\alpha$, pourront utiliser* `alpha` *dans leur programme.*