Devoir maison 007

À rendre le lundi 4 décembre 2023

Exercice 1 : Sommes cumulées de numéros de boules

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que la somme cumulée des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

A chaque tirage cette somme cumulée augmente de 1 au minimum si bien que, dans le pire des cas, elle dépassera ou atteindra n au $n^{\text{ième}}$ tirage. Pour simplifier l'étude, on suppose donc que l'on effectue exactement n tirages successifs avec remise dans cette urne et que l'on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieur ou égale à n.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieur ou égale à n.

Un exemple. *Supposons que $n = 10$ et que les numéros obtenus sont, dans cet ordre, $2, 1, 5, 1, 8, 4, 3, 1, 7, 3$, alors les événements suivantes sont réalisé :*

$$[S_1 = 2],\ [S_2 = 3],\ [S_3 = 8],\ [S_4 = 9],\ [S_5 = 17],\ [S_6 = 21],\ [S_7 = 24],\ [S_8 = 25],\ [S_9 = 32],\ [S_{10} = 35]$$

et donc $[T_{10} = 5]$ est réalisé (puisque $[S_4 < 10]$ et $[S_5 \geqslant 10]$ sont réalisés).

1) Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω.

2) a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_i et donner (sans calculs) son espérance et sa variance.
   b) En déduire l'espérance de S_k pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$.

3) Écrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui renvoie une réalisation de T_n.
   Autrement dit, tant que la somme (initialement nulle) ne dépasse pas n, on simule un tirage avec remise dans l'urne et on ajoute la valeur de la boule à la somme. On renvoie le nombre de termes ajoutés.

4) a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
   c) Montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

5) **Quelques cas particuliers [1].**
   a) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.
   b) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$. Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.
   c) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 4$. Déterminer la loi de T_4 et calculer son espérance.
   On commencera exprimer $[T_4 = 2]$ en fonction de X_1 et X_2.

1. On pensera bien à utiliser les résultats de la question 4.

6) a) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Fixons $k \in [\![1, n-1]\!]$. Écrire S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

c) Soient $i \in [\![k+1, n]\!]$ et $j \in S_k(\Omega)$. Déterminer alors $\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1} = i)$.
On séparera les cas où $j \leqslant i-1$ et $j \geqslant i$.

d) En déduire que

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

7) a) A l'aide notamment de la formule du triangle de Pascal , montrer que pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$,

$$\sum_{j=a}^{b} \binom{j-1}{a-1} = \binom{b}{a}.$$

b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $H(k)$ la propriété :

$$« \quad \forall i \in [\![k, n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \quad » .$$

Montrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la propriété $H(k)$ est vraie.

8) a) Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9) a) Montrer par le calcul que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k) = \mathbb{E}(T_n).$$

b) En déduire que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.